This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

TRAITÉ
D'ARITHMÉTIQUE

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES A ET B

ET DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT

AVEC DES COMPLÉMENTS

DESTINÉS AUX CANDIDATS AUX GRANDES ÉCOLES DU GOUVERNEMENT

PAR

E. HUMBERT

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND

Et une Préface

DE

JULES TANNERY

DIRECTEUR DES ÉTUDES SCIENTIFIQUES A L'ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE

TROISIÈME ÉDITION

PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie
63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1903

(Tous droits réservés)

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE

A LA MÊME LIBRAIRIE

TRAITÉS DE MATHÉMATIQUES

à l'usage des élèves de Mathématiques et des aspirants aux Baccalauréats avec des *Compléments* destinés aux candidats aux Ecoles du Gouvernement. — Volumes 22/14cm, brochés :

Arithmétique, par E. Humbert, professeur agrégé au lycée Louis-le-Grand, 3e édition . . . . . 5 fr.

Algèbre élémentaire, par N. Cor, professeur agrégé au lycée Saint-Louis, et J. Riemann, docteur ès sciences, professeur agrégé au lycée Louis-le-Grand . . . . . 6 fr.

Géométrie, par C. Guichard, docteur ès sciences, professeur à la Faculté des sciences de l'Université de Clermont . . . . . 5 fr.
Compléments . . . . . (Sous presse.)

Géométrie descriptive, par X. Antomari, docteur ès sciences, professeur agrégé au lycée Carnot (vol. 25/16). . . . . 3 fr.

Mécanique, par E. Carvallo, docteur ès sciences, agrégé de mathématiques, répétiteur et examinateur à l'Ecole Polytechnique, 2e édit. 2 fr. 50

Cosmographie avec des notions sur l'*Histoire de l'Astronomie*, par A. Grignon, licencié ès sciences mathématiques et physiques.

Trigonométrie rectiligne, par E. Dessenon, professeur agrégé au lycée Saint-Louis, 3e édition. . . . . 3 fr.

Eléments de Méthodologie mathématique, *à l'usage de tous ceux qui s'occupent de mathématiques élémentaires*, par M. Dauzat, inspecteur d'Académie. — Un beau vol. in-8° de 1100 pages, avec figures. . 10 fr.

TRAITÉ
D'ARITHMÉTIQUE

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES A ET B

ET DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT

AVEC DES COMPLÉMENTS

DESTINÉS AUX CANDIDATS AUX GRANDES ÉCOLES DU GOUVERNEMENT

PAR

E. HUMBERT

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND

Et une Préface

DE

JULES TANNERY

DIRECTEUR DES ÉTUDES SCIENTIFIQUES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

TROISIÈME ÉDITION

PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie
63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1903

(Tous droits réservés)

499.03
Moll ~~501.03~~

1903

PRÉFACE

M. Humbert m'a fait l'honneur de me demander de mettre quelques lignes en tête du traité d'Arithmétique qu'il publie; assurément, le mérite de son livre rend toute recommandation inutile, et je ne puis prétendre, pour le recommander, à aucune autre autorité que celle qu'on voudra bien trouver dans l'intérêt que je porte, par métier et par goût, aux choses de l'enseignement; en me montrant qu'il sait combien cet intérêt est vif, M. Humbert ne pouvait que me flatter beaucoup.

Il y a plaisir à voir un professeur de mathématiques spéciales, aussi distingué que lui, écrire un traité d'Arithmétique, quand l'Arithmétique ne figure plus sur les programmes des examens auxquels ses élèves se préparent : pourtant il pensait peut-être encore à ses élèves en l'écrivant : il arrive plus d'une fois qu'un étudiant, déjà avancé, déjà rompu au mécanisme du calcul, est arrêté parce qu'il n'a pas suffisamment réfléchi au sens des opé-

rations fondamentales, ni à tout ce que contient l'idée de nombre. S'il s'en aperçoit, il est sauvé, et le temps qu'il passera à lire un livre comme celui de M. Humbert ne sera pas perdu pour la suite de ses études, et même pour ses examens ; la clarté dans laquelle il verra les éléments se projettera, à son grand étonnement, sur bien des parties de la science qui étaient restées pour lui dans la brume. Et si quelqu'une de ces belles propriétés des nombres que développe l'auteur, et qui donnent accès dans les parties élevées de l'Arithmétique l'émerveillent, l'attirent, et lui donnent le désir d'en savoir davantage, qu'il se réjouisse : je crois bien qu'il n'y a pas de mathématicien véritable qui n'ait ressenti cette curiosité et cette passion.

Sur divers points, le livre de M. Humbert se distingue nettement des ouvrages écrits sur la même matière.

Dès le début, à propos de la soustraction, M. Humbert introduit le nombre entier *négatif*. Disons de suite que tout ce qui concerne ces nombres est imprimé en petits caractères et n'importe aucunement à l'intelligence des théories fondamentales de l'Arithmétique, que l'auteur a exposées de la façon la plus élémentaire possible : tout ce qui est imprimé en gros caractères peut être lu sans qu'on soit obligé de recourir au reste, en sorte que le livre de M. Humbert s'adresse aussi bien à des élèves de Troisième, qu'à des élèves de Mathématiques élémentaires. J'ai entendu soutenir à de

très bons esprits la convenance d'introduire ainsi les nombres négatifs en Arithmétique : l'Algèbre dès lors a un domaine nettement limité : c'est la théorie des fonctions entières d'une ou de plusieurs variables. Au point de vue logique, cette façon de présenter les choses me paraît être la meilleure ; au point de vue pédagogique, l'expérience seule peut la juger. Dans un livre, en tous cas, cette tentative ne présente aucun danger ; dans l'enseignement, son succès est, à ce que je crois, une affaire de mesure, et il me semble qu'elle peut parfaitement réussir avec des élèves de Mathématiques élémentaires, qui revoient l'Arithmétique, et qui sont déjà initiés à l'Algèbre. Quant aux avantages qu'elle présente, ils sont assez évidents pour qu'on me dispense d'y insister. M. Humbert a introduit les nombres négatifs en partant de ce qu'on a appelé, de l'autre côté du Rhin, le *principe de permanence.* Il n'y met, bien entendu, aucun pédantisme. La démonstration imagée qu'il emploie pour établir la propriété fondamentale des sommes algébriques a le grand avantage d'être courte et générale.

Pour ce qui concerne les opérations fondamentales de l'Arithmétique, M. Humbert, suivant en cela beaucoup d'auteurs, place d'ordinaire après la théorie de l'opération les propriétés essentielles qui résultent de la définition : il me semble que l'ordre inverse serait préférable : c'est sur ces propositions surtout qu'il convient d'appeler l'attention du lecteur, et, d'ailleurs, elles éclairent

l'opération elle-même, qui n'est qu'un mécanisme de calcul dont, à la vérité, il importe de se rendre compte.

On a pris l'habitude d'enseigner la théorie de la divisibilité en l'appuyant sur celle du plus grand commun diviseur ; l'auteur respecte cet ordre, qui est excellent ; mais il a tenu à montrer qu'il n'est pas indispensable, et a reproduit la démonstration directe que Gauss a donnée de cette proposition : Un nombre premier ne peut diviser un produit de deux facteurs sans diviser l'un d'eux.

Dans la plupart des ouvrages élémentaires, l'introduction de l'idée de fraction n'est pas faite avec la clarté désirable, et on ne sait pas toujours très bien si l'on raisonne sur un nombre ou sur une grandeur. S'il s'agit de nombres, que signifient ces mots : rendre une fraction trois fois plus grande, trois fois plus petite ? Qu'est-ce même que deux fractions égales ? M. Humbert a pris là-dessus très nettement position : deux fractions sont égales, si elles peuvent servir à mesurer la même longueur : et, de même, pour l'addition, la soustraction, c'est l'idée d'addition, ou de soustraction des longueurs qu'il prend pour point de départ ; pour la multiplication, c'est le théorème sur l'aire du rectangle ; les démonstrations qu'il donne sont très claires et très bien adaptées à l'enseignement.

Il est aussi légitime, à mon avis, après avoir rattaché, comme il me paraît nécessaire dans l'en-

seignement, l'idée de fraction à la mesure de la plus simple des grandeurs continues, de la détacher de son origine concrète pour définir abstraitement l'égalité et les opérations fondamentales : ce qui n'est pas légitime, c'est de rester dans le vague.

Je ne connais rien de plus insupportable en mathématiques que les nombres irrationnels ; leur introduction en arithmétique est un véritable scandale : dans ce domaine si élémentaire, à côté de cette notion de nombre entier qui est la plus claire du monde, à côté de ces propositions si précises, de ces démonstrations si nettes, que les plus grands mathématiciens ont pris à cœur d'accroître et de simplifier et qui ont toute la beauté, toute la perfection de celles que les Grecs nous ont léguées, voici venir tout le cortège du transcendant et de l'infini. C'est là, non ailleurs, que sont condensées toutes les difficultés des idées de limite, de convergence, de continuité. Que faire pourtant, si l'on veut seulement écrire $\sqrt{2}+\sqrt{3}$? Nous n'y pouvons rien, et c'est en vain qu'on se révoltera : cette idée de l'infini est dans la nécessité des choses ; on la réduira, si l'on veut, à ses termes les plus simples, à dire qu'après un nombre entier il y en a un autre, on ne s'en débarrassera pas, pas plus en Arithmétique qu'ailleurs.

A vrai dire, la sagesse est de reconnaître les difficultés là où elles sont, et l'honnêteté dans l'enseignement ne consiste pas à dire tantôt *on verra plus tard*, tantôt *on a déjà vu*, sans jamais rien montrer.

Tout au moins, qu'on ait le courage de dire : il y a là un trou. Mais M. Humbert, qui écrivait aussi pour ceux qui doivent aller plus loin que le « trou », a eu raison d'essayer d'y faire pénétrer le plus de lumière possible, et de donner tous ses soins à bien éclairer la notion de nombre irrationnel. Son point de départ est le même que celui qu'il a pris pour les fractions, l'idée de longueur : à chaque longueur est attaché un nombre rationnel ou non ; à chaque nombre rationnel ou non, une longueur est attachée : cette longueur sert à définir l'égalité, comme l'addition et la soustraction : d'ailleurs, on montre comment on peut se passer de cette considération concrète, au moyen d'opérations arithmétiques effectuées sur des nombres rationnels, et poursuivies jusqu'à l'infini.

Ce procédé, qui a l'avantage de laisser un point d'appui à l'élève, de ne pas le noyer dans l'abstrait, suppose, comme le fait remarquer l'auteur, un postulat qui est étranger à l'idée de nombre, et qui n'est autre chose, quand on définit le nombre irrationnel abstraitement, que l'existence même d'un segment de droite mesuré par ce nombre. Comme ce postulat est, en tout cas, absolument nécessaire, quand on veut appliquer l'algèbre à la géométrie, il n'y a rien à objecter à ce qu'on l'introduise.

Enfin M. Humbert a voulu, avec raison, donner à son lecteur accès dans la théorie des nombres. Il importe, pour la bonne formation de l'esprit des étudiants, de leur montrer que la science n'est pas

limitée, et qu'ils ne la possèdent pas dès qu'ils sont arrivés à la fin d'un livre. On trouvera dans celui-ci les propositions élémentaires concernant les congruences binômes, les restes quadratiques et le théorème relatif à la décomposition d'un nombre en quatre carrés.

Je souhaite au livre de M. Humbert le succès qu'il mérite : il a été *pensé* avant d'avoir été écrit.

JULES TANNERY.

499.03
Brolf ~~501.03~~

1903

PRÉFACE

M. Humbert m'a fait l'honneur de me demander de mettre quelques lignes en tête du traité d'Arithmétique qu'il publie; assurément, le mérite de son livre rend toute recommandation inutile, et je ne puis prétendre, pour le recommander, à aucune autre autorité que celle qu'on voudra bien trouver dans l'intérêt que je porte, par métier et par goût, aux choses de l'enseignement; en me montrant qu'il sait combien cet intérêt est vif, M. Humbert ne pouvait que me flatter beaucoup.

Il y a plaisir à voir un professeur de mathématiques spéciales, aussi distingué que lui, écrire un traité d'Arithmétique, quand l'Arithmétique ne figure plus sur les programmes des examens auxquels ses élèves se préparent : pourtant il pensait peut-être encore à ses élèves en l'écrivant : il arrive plus d'une fois qu'un étudiant, déjà avancé, déjà rompu au mécanisme du calcul, est arrêté parce qu'il n'a pas suffisamment réfléchi au sens des opé-

l'opération elle-même, qui n'est qu'un mécanisme de calcul dont, à la vérité, il importe de se rendre compte.

On a pris l'habitude d'enseigner la théorie de la divisibilité en l'appuyant sur celle du plus grand commun diviseur ; l'auteur respecte cet ordre, qui est excellent ; mais il a tenu à montrer qu'il n'est pas indispensable, et a reproduit la démonstration directe que Gauss a donnée de cette proposition : Un nombre premier ne peut diviser un produit de deux facteurs sans diviser l'un d'eux.

Dans la plupart des ouvrages élémentaires, l'introduction de l'idée de fraction n'est pas faite avec la clarté désirable, et on ne sait pas toujours très bien si l'on raisonne sur un nombre ou sur une grandeur. S'il s'agit de nombres, que signifient ces mots : rendre une fraction trois fois plus grande, trois fois plus petite ? Qu'est-ce même que deux fractions égales ? M. Humbert a pris là-dessus très nettement position : deux fractions sont égales, si elles peuvent servir à mesurer la même longueur : et, de même, pour l'addition, la soustraction, c'est l'idée d'addition, ou de soustraction des longueurs qu'il prend pour point de départ ; pour la multiplication, c'est le théorème sur l'aire du rectangle ; les démonstrations qu'il donne sont très claires et très bien adaptées à l'enseignement.

Il est aussi légitime, à mon avis, après avoir rattaché, comme il me paraît nécessaire dans l'en-

seignement, l'idée de fraction à la mesure de la plus simple des grandeurs continues, de la détacher de son origine concrète pour définir abstraitement l'égalité et les opérations fondamentales : ce qui n'est pas légitime, c'est de rester dans le vague.

Je ne connais rien de plus insupportable en mathématiques que les nombres irrationnels ; leur introduction en arithmétique est un véritable scandale : dans ce domaine si élémentaire, à côté de cette notion de nombre entier qui est la plus claire du monde, à côté de ces propositions si précises, de ces démonstrations si nettes, que les plus grands mathématiciens ont pris à cœur d'accroître et de simplifier et qui ont toute la beauté, toute la perfection de celles que les Grecs nous ont léguées, voici venir tout le cortège du transcendant et de l'infini. C'est là, non ailleurs, que sont condensées toutes les difficultés des idées de limite, de convergence, de continuité. Que faire pourtant, si l'on veut seulement écrire $\sqrt{2}+\sqrt{3}$? Nous n'y pouvons rien, et c'est en vain qu'on se révoltera : cette idée de l'infini est dans la nécessité des choses ; on la réduira, si l'on veut, à ses termes les plus simples, à dire qu'après un nombre entier il y en a un autre, on ne s'en débarrassera pas, pas plus en Arithmétique qu'ailleurs.

A vrai dire, la sagesse est de reconnaître les difficultés là où elles sont, et l'honnêteté dans l'enseignement ne consiste pas à dire tantôt *on verra plus tard*, tantôt *on a déjà vu*, sans jamais rien montrer.

Tout au moins, qu'on ait le courage de dire : il y a là un trou. Mais M. Humbert, qui écrivait aussi pour ceux qui doivent aller plus loin que le « trou », a eu raison d'essayer d'y faire pénétrer le plus de lumière possible, et de donner tous ses soins à bien éclairer la notion de nombre irrationnel. Son point de départ est le même que celui qu'il a pris pour les fractions, l'idée de longueur : à chaque longueur est attaché un nombre rationnel ou non ; à chaque nombre rationnel ou non, une longueur est attachée : cette longueur sert à définir l'égalité, comme l'addition et la soustraction : d'ailleurs, on montre comment on peut se passer de cette considération concrète, au moyen d'opérations arithmétiques effectuées sur des nombres rationnels, et poursuivies jusqu'à l'infini.

Ce procédé, qui a l'avantage de laisser un point d'appui à l'élève, de ne pas le noyer dans l'abstrait, suppose, comme le fait remarquer l'auteur, un postulat qui est étranger à l'idée de nombre, et qui n'est autre chose, quand on définit le nombre irrationnel abstraitement, que l'existence même d'un segment de droite mesuré par ce nombre. Comme ce postulat est, en tout cas, absolument nécessaire, quand on veut appliquer l'algèbre à la géométrie, il n'y a rien à objecter à ce qu'on l'introduise.

Enfin M. Humbert a voulu, avec raison, donner à son lecteur accès dans la théorie des nombres. Il importe, pour la bonne formation de l'esprit des étudiants, de leur montrer que la science n'est pas

limitée, et qu'ils ne la possèdent pas dès qu'ils sont arrivés à la fin d'un livre. On trouvera dans celui-ci les propositions élémentaires concernant les congruences binômes, les restes quadratiques et le théorème relatif à la décomposition d'un nombre en quatre carrés.

Je souhaite au livre de M. Humbert le succès qu'il mérite : il a été *pensé* avant d'avoir été écrit.

JULES TANNERY.

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE

PRÉLIMINAIRES

1. **Nombre entier.** — L'idée de *nombre entier* naît en nous à la vue de plusieurs objets. Lorsque nous voyons une collection d'objets de même espèce, ou d'espèces différentes, nous avons souvent besoin de savoir combien il y a d'objets dans ce groupe ; c'est le nombre entier qui nous permet d'atteindre ce but. Nous dirons donc que le nombre entier sert à *compter* les objets ou sert au *dénombrement* des objets.

2. **Unité.** — La vue d'un objet isolé nous donne l'idée du nombre *un*, de l'*unité abstraite* ; et nous sommes conduits presque immédiatement à cette définition abstraite et précise du nombre entier : *le nombre entier est une collection d'unités.*

3. **Zéro.** — L'absence d'objets nous conduit à une idée nouvelle et très importante, l'idée du nombre *zéro ;* de même que nous disons que dans un groupe il y a un, deux, trois, etc. objets d'une nature déterminée, de même nous dirons qu'il y a zéro objet de cette espèce, quand il n'y en aura aucun.

4. **Idée d'addition.** — Toutes ces notions sont très im-

portantes et, jointes à l'idée d'addition, elles constituent la base de toutes les opérations sur les nombres entiers et des nombreuses propriétés qui en découlent. Du reste, cette idée d'addition est fort simple ; elle consiste essentiellement en ceci : si on considère deux groupes d'objets et qu'on les réunisse en un seul, le nombre des objets contenus dans le nouveau groupe est appelé la *somme* des nombres d'objets contenus dans les deux anciens groupes. Il est alors évident que tout nombre entier nouveau s'obtient par l'addition de l'unité à un nombre entier déjà conçu et formé et que, par suite, l'ensemble des nombres entiers est illimité, ou bien qu'il n'y a pas de dernier nombre entier, pas de nombre entier plus grand que tous les autres.

5. Autres moyens de parvenir à l'idée de nombre entier.— La répétition d'un même phénomène, d'un même événement, ou d'événements semblables, donne encore l'idée de compter tous ces événements, et conduit aussi à l'emploi du nombre entier ; dans beaucoup d'autres cas encore, l'usage du nombre entier est indispensable ; mais il en est un tellement fréquent, et important par l'extension qu'il nous permettra de donner à l'idée de nombre, que nous ne pouvons le passer sous silence : nous voulons parler de la mesure des grandeurs à l'aide de nombres entiers, quand cela se peut. Un exemple nous suffira pour le moment : supposons que l'on veuille avoir une idée nette de la longueur d'une pièce d'étoffe, d'un mur, d'un chemin, etc. ; on prendra une barre, dont la longueur ne soit ni trop petite ni trop grande, facile à concevoir, à comparer à nos propres dimensions, et l'on portera cette barre sur la longueur à mesurer, jusqu'à ce que cette longueur soit épuisée ; si notre barre est ainsi contenue cinq fois, sans aucun reste, dans la longueur qui nous occupe, nous dirons que le nombre entier *cinq* représente cette longueur, ou bien qu'elle a pour *mesure* le nombre cinq ; quant à l'opération qui a été faite,

nous dirons qu'elle a pour but de *mesurer* une longueur. La barre employée se nomme *unité*.

D'une manière générale, lorsqu'on veut mesurer des grandeurs d'une espèce déterminée, on fait choix parmi elles d'une grandeur-type à laquelle on compare les autres, et que l'on appelle *unité*.

Mesurer une grandeur, c'est chercher combien de fois elle contient son unité, quand elle la contient un nombre exact de fois, sans reste. Nous verrons plus tard une définition plus générale.

Le *nombre entier* est alors le résultat de la mesure d'une grandeur. Mais, dans le cas particulier où nous nous sommes placé, cette idée est à peine différente de celle que nous avons donnée au début, car les grandeurs de l'espèce que nous envisageons peuvent être conçues comme étant des collections d'unités.

6. Objet de l'arithmétique. — Si l'on part de l'idée d'addition dont nous avons déjà parlé, on arrive sans peine à combiner les nombres entiers entre eux de diverses façons et à les comparer les uns aux autres ; de là, naissent certaines opérations dont l'ensemble constitue le *calcul*.

L'arithmétique a pour but d'étudier les règles du calcul et les propriétés qui en résultent pour les nombres entiers.

LIVRE PREMIER

NOMBRES ENTIERS. — PREMIÈRES OPÉRATIONS

CHAPITRE PREMIER

NUMÉRATION

7. **Représentation des nombres.** — L'une des premières questions qui se présentent en arithmétique est la représentation des nombres entiers, soit dans le langage, soit dans l'écriture; en d'autres termes, il faut donner des noms aux nombres, et les écrire ou les représenter par des signes conventionnels.

Les premiers nombres entiers ont reçu des noms différents :

un, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit*, *neuf*;

ils sont représentés par les symboles suivants :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

qui se lisent comme il vient d'être dit, et que l'on appelle *chiffres arabes*, ou, simplement, *chiffres*. On ajoute aux neuf premiers nombres entiers le nombre *zéro* , dont nous avons déjà parlé, et qui est représenté par le symbole 0.

8. **Division de la numération.** — L'objet de la numération étant double : donner des noms aux nombres entiers et les écrire, cette partie de l'arithmétique se divise naturellement en deux : la *numération parlée*, qui a pour but de

donner des noms aux nombres ; la *numération écrite*, qui a pour but de les écrire de la façon la plus simple possible.

Il est bien clair d'ailleurs que l'on ne pourra jamais nommer et représenter tous les nombres entiers, puisque la suite de ceux-ci est illimitée.

NUMÉRATION PARLÉE

9. Système décimal. — Le premier nombre entier qui vient après le nombre neuf, se nomme *dix*. Dix unités ordinaires forment une unité du *second ordre* ou *dizaine* ; dix unités de second ordre forment une unité du *troisième ordre* ou *centaine* ; dix unités du troisième ordre forment une unité du *quatrième ordre* ou *mille* ; puis viennent les *dizaines de mille*, les *centaines de mille*, les *millions*, les *dizaines de millions*, les *centaines de millions*, etc.

On réunit ensuite ces diverses unités en *classes* ; les unités des trois premiers ordres forment la *première classe* ; celles des trois ordres suivants forment la *seconde classe* ; et ainsi de suite.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on veuille compter le nombre des grains de blé qu'il y a dans un tas : nous commencerons par former de petits tas de dix grains de blé, que nous réunirons entre eux, dix par dix, pour avoir de nouveaux tas contenant chacun une centaine de grains de blé ; nous réunirons entre eux ces nouveaux tas, dix par dix, pour avoir de nouveaux tas contenant chacun mille grains de blé ; et ainsi de suite ; nous finirons certainement par épuiser les grains de blé contenus dans le tas. Supposons maintenant qu'une fois la dernière dizaine enlevée, il reste sept grains de blé dans le tas primitif ; qu'une fois la dernière centaine formée avec les petits tas de dix grains de blé chacun, il reste cinq dizaines ; que, de même, il reste deux centaines, zéro mille, trois dizaines de mille, non employés, et qu'enfin il y ait en tout huit tas contenant cha-

cun une centaine de mille grains de blé, et aucun plus volumineux que ceux-ci. Le nombre cherché est alors complètement formé, et nous pouvons l'énoncer de plusieurs façons, par exemple en disant qu'il contient sept unités, cinq dizaines, deux centaines, trois dizaines de mille et huit centaines de mille, ou bien qu'il contient huit centaines de mille, trois dizaines de mille, deux centaines, cinq dizaines et sept unités. Généralement on lit les nombres de la dernière façon, en commençant par les unités de l'ordre le plus élevé ; mais il nous reste à faire connaître diverses abréviations et modifications que l'usage a consacrées.

10. **Noms des nombres entiers.** — Les dix premiers nombres entiers ont reçu des noms distincts les uns des autres, *un*, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit*, *neuf*, *dix*.

Cela posé, il eût été logique de dire, au lieu de *une dizaine*, *un-dix ou dix* ;

De deux dizaines,	deux-dix ;
— trois dizaines,	trois-dix ;
— quatre dizaines,	quatre-dix ;
— cinq dizaines,	cinq-dix ;
— six dizaines,	six-dix ;
— sept dizaines,	sept-dix ;
— huit dizaines,	huit-dix ;
— neuf dizaines,	neuf-dix.

Les noms suivants ont prévalu et ont été consacrés par l'usage ; au lieu de :

une dizaine,	on dit	dix ;
deux dizaines,	—	vingt ;
trois dizaines,	—	trente ;
quatre dizaines,	—	quarante ;
cinq dizaines,	—	cinquante ;
six dizaines,	—	soixante ;
sept dizaines,	—	soixante-dix ;
huit dizaines,	—	quatre-vingts :

neuf dizaines,	on dit	quatre-vingt-dix.

L'irrégularité qui se manifeste à la fin de ce petit tableau n'existe pas partout. Dans un assez grand nombre de départements du Midi, on dit *septante* au lieu de *soixante-dix*, *octante* au lieu de *quatre-vingts*, *nonante* au lieu de *quatre-vingt-dix*.

Les nombres compris entre deux nombres exacts de dizaines, par exemple entre trente et quarante, se nomment, *trente-un*, *trente-deux*, *trente-trois*, *trente-quatre*, *trente-cinq*, *trente-six*, *trente-sept*, *trente-huit*, *trente-neuf*. Il y a exception pour les six premiers nombres qui viennent après dix; au lieu de :

dix-un,	on dit	onze ;
dix-deux,	—	douze ;
dix-trois,	—	treize ;
dix-quatre,	—	quatorze ;
dix-cinq,	—	quinze ;
dix-six,	—	seize.

La même exception se reproduit après *soixante-dix* et *quatre-vingt-dix* ; on dit *soixante-onze*, *soixante-douze*, etc., *quatre-vingt-onze*, *quatre-vingt-douze*, etc.

Les nombres de centaines ont aussi reçu des noms un peu abrégés ; ainsi au lieu de dire :

une centaine,	on dit	un cent ou cent ;
deux centaines,	—	deux cents ;
trois centaines,	—	trois cents ;
quatre centaines,	—	quatre cents ;
cinq centaines,	—	cinq cents ;
six centaines,	—	six cents ;
sept centaines,	—	sept cents ;
huit centaines,	—	huit cents ;
neuf centaines,	—	neuf cents.

Cela étant, on adopte, dans la lecture des nombres, la convention suivante :

On énonce d'abord les unités d'ordre le plus élevé, puis suc-

cessivement celles d'ordres moindres, en gardant à la dernière partie de chaque nombre le nom qui lui a été donné antérieurement, lorsque l'usage a consacré un nom plus court que celui que donnent les conventions générales.

Nous pouvons maintenant, sans aucune difficulté, lire un nombre composé uniquement d'unités de la première classe. Ex. : si un nombre contient sept centaines, huit dizaines et une unité, nous dirons que ce nombre est *sept cent quatre-vingt-un* ; si un nombre contient deux centaines, sept dizaines et cinq unités, nous lirons ce nombre *deux cent soixante-quinze.*

Considérons maintenant un nombre qui ne contient que des unités des divers ordres d'une même classe ; nous regarderons ce nombre comme étant composé à l'aide des unités de l'ordre le moins élevé, absolument comme un nombre composé d'unités des trois premiers ordres est formé avec l'unité ordinaire ; on le lit de la même façon et on fait suivre son nom du nom de l'unité constitutive de la classe. Ex. : soit un nombre contenant trois centaines de millions, cinq dizaines de millions et huit millions ; ce nombre se lit *trois cent cinquante-huit millions.*

Les unités constitutives des diverses classes, dont nous avons déjà indiqué les noms, sont : l'*unité ordinaire*, pour la première classe ; le *mille*, pour la seconde classe ; le *million*, pour la troisième classe ; le *billion* ou *milliard*, le *trillion*, etc.

Il est alors facile de lire un nombre quelconque : on lit successivement les nombres de chaque classe dont il est composé, en commençant par la plus haute classe, de façon que les ordres des classes aillent en décroissant. Ex. : *sept cent vingt-huit millions cinq cent quatre mille deux cent trente-six* est un nombre qui contient sept centaines de millions, deux dizaines de millions, huit millions, cinq centaines de milles, quatre milles, deux centaines, trois dizaines, six unités.

11. Systèmes de numération. — Le nombre d'unités de chaque ordre que l'on réunit pour obtenir une unité de l'ordre immédiatement supérieur s'appelle la *base* du système de numération ; ce nombre ici est dix, et le systeme de numération employé s'appelle le *système décimal*. Mais il est clair que l'on peut se servir de tout autre nombre que dix, par exemple de douze ; on obtiendrait alors le *système duodécimal*, dans lequel il faudrait donner des noms aux douze premiers nombres, puis à une, deux, trois, etc. douzaines, puis à douze douzaines, deux fois douze douzaines, etc.

NUMÉRATION ÉCRITE

12. Symboles adoptés pour représenter les nombres. Conventions. — Les neuf premiers nombres entiers sont représentés par les symboles

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

appelés *chiffres arabes* ou simplement *chiffres*, et qui se lisent :

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf ;

le nombre *zéro* est représenté par le symbole 0.

A l'aide de ce petit nombre de chiffres, on est parvenu à représenter tous les nombres, en faisant simplement la convention suivante :

On écrit le chiffre qui représente les unités d'un ordre déterminé à gauche du chiffre qui représente les unités de l'ordre immédiatement inférieur, de façon que les unités des divers ordres se succèdent en parcourant le nombre de droite à gauche ; on remplace le chiffre des unités d'un ordre qui manquent par 0.

On arrive alors très vite à écrire les nombres de trois chiffres, c'est-à-dire les nombres de la première classe ; ainsi sept cent vingt-huit s'écrit 728, et sept cent quatre s'écrit 704.

Pour écrire un nombre quelconque, il suffit d'écrire l'un après l'autre, en allant de gauche à droite, les nombres des diverses classes que l'on nomme, car nous sommes convenus de nommer d'abord les classes les plus élevées et les unités d'ordre le plus élevé ; chaque classe, sauf la première à gauche, doit se composer de trois chiffres, en n'oubliant pas de mettre des zéros à la place des unités des ordres qui manquent. Exemples : le nombre sept millions deux cent quatre mille six cent vingt-cinq s'écrit

7 204 625 ;

le nombre dix-huit billions quatre mille sept cent quarante-deux s'écrit

18 000 004 742.

13. **Lecture des nombres représentés par des chiffres.** — Considérons maintenant un nombre formé par une succession de certains chiffres, placés les uns à côté des autres, sur une même ligne horizontale,

65008723109 ;

pour lire un pareil nombre, il suffit, d'après les conventions que nous avons expliquées antérieurement, de le partager, soit par la pensée, soit à l'aide de virgules, en tranches de trois chiffres, en commençant par la droite, la dernière tranche vers la gauche pouvant d'ailleurs n'avoir que un ou deux chiffres. Cela revient à diviser le nombre donné en classes, et il suffit alors de lire chacune des classes, en lui donnant le nom qui lui est propre, et en commençant cette fois par la gauche ; le nombre donné s'écrit ainsi :

65 008 723 109

et se lit : soixante-cinq milliards huit millions sept cent vingt-trois mille cent neuf unités.

En résumé, le procédé qui sert à la lecture des nombres consiste essentiellement dans la division de ces nombres en tranches de trois chiffres, à partir de la droite, et dans

la lecture de ces diverses tranches les unes après les autres, à partir de la gauche, en faisant suivre chacun des nombres dont elles sont formées du nom des unités de la classe qu'il représente.

C'est du reste le même procédé qui permet d'écrire en chiffres un nombre énoncé en langage ordinaire.

On voit donc, en définitive, que tout revient à la lecture et à l'écriture des nombres de trois chiffres au plus, c'est-à-dire des nombres plus petits que mille.

14. Valeur absolue d'un chiffre, valeur relative. — On appelle *valeur absolue* d'un chiffre le nombre qu'il représente quand il est seul ; la *valeur relative* d'un chiffre écrit dans un nombre est, au contraire, le nombre qu'il représente, en tenant compte de la place qu'il occupe. Exemple : soit le nombre

75837 ;

la valeur absolue du chiffre cinq est cinq unités, tandis que sa valeur relative est cinq mille.

Il résulte de la manière dont les nombres sont composés et de l'idée d'addition, exposée antérieurement, que la valeur d'un nombre quelconque est égale à la somme des valeurs relatives de tous les chiffres qui le composent ; ainsi le nombre précédent est égal à la somme des nombres soixante-dix mille, cinq mille, huit cents, trente et sept.

Zéro a pour valeur absolue et pour valeur relative zéro, quelle que soit la place qu'il occupe.

15. Nous dirons qu'un nombre est plus grand qu'un autre lorsqu'il vient après celui-ci dans la suite des nombres entiers, ou lorsqu'il contient plus d'unités que lui. Nous dirons qu'un nombre est dix fois, vingt fois plus grand qu'un autre, lorsqu'il contient dix fois, vingt fois plus d'unités. Il résulte alors des conventions faites sur la représentation des nombres à l'aide de chiffres, que l'on rendra un

nombre dix fois, cent fois, mille fois, etc., plus grand qu'un autre en ajoutant un, deux, trois, etc. zéros à sa droite. Exemple : les nombres 820, 8200, 82000, sont dix, cent, mille fois plus grands que le nombre 82. En effet, en ajoutant un, deux, trois zéros à la droite d'un nombre donné, on n'altère pas les nombres des unités des divers ordres qui le constituent, seulement les ordres de ces unités sont augmentés de un, de deux, de trois, et chacune d'elles représente des unités dix, cent, mille fois plus grandes.

De la même manière, si un nombre entier est terminé à sa droite par des zéros, on le rendra dix, cent, mille fois plus petit, en supprimant sur sa droite un, deux, trois zéros.

16. **Chiffres romains.** — Les Romains représentaient les nombres à l'aide de lettres ; ils se servaient à cet effet des sept lettres suivantes :

I, V, X, L, C, D, M,

dont les valeurs conventionnelles sont

1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000.

Nous allons indiquer quelles sont les conventions qui permettent de représenter un nombre quelconque avec ces sept symboles :

1° *On ajoute à tout chiffre romain celui qui est placé immédiatement à droite, s'il ne le surpasse pas ; au contraire, on retranche de tout chiffre romain celui qui est placé immédiatement à gauche, s'il est plus petit que lui ;* exemples :

I, II, III, VI, XII, LX, LXXI ;

ces symboles représentent un, deux, trois, six, douze, soixante, soixante et onze ; les symboles suivants :

IV, IX, XL, CDXI,

représentent les nombres quatre, neuf, quarante, quatre cent onze.

2° *Tout chiffre romain placé entre deux chiffres plus forts*

que lui se retranche de celui qui est à sa droite; exemples : les nombres **14**, **19**, **59**, **141** se représentent de la façon suivante :

XIV, XIX, LIX, CXLI.

3° *Tout nombre écrit en chiffres romains et surmonté d'un trait horizontal représente des unités de la seconde classe, c'est-à-dire des milles ; s'il est surmonté de deux traits, il représente des millions ; etc. ;* exemples :

$\overline{\text{XX}}$, $\overline{\text{LXI}}$, $\overline{\overline{\text{CXL}}}$,

ces symboles représentent les nombres vingt mille, soixante et un mille, cent quarante millions.

On peut, à l'aide de ces conventions, représenter un nombre quelconque ; reprenons, comme exemple, le nombre

65 008 723 109 ;

ce nombre s'écrit, à l'aide des caractères romains,

$\overline{\overline{\overline{\overline{\text{LXV}}}}}$ $\overline{\overline{\overline{\text{VIII}}}}$ $\overline{\text{DCCXXIII}}$ CIX.

Pour les nombres compris entre un et quatre mille, on représente chaque mille, s'il y en a, par un M : 1000, 2000, 3000, s'écrivent M, MM, MMM.

Les caractères romains sont employés actuellement pour écrire les dates et numéroter les chapitres des livres ; la date **1891** s'écrit MDCCCLXLI.

CHAPITRE II

ADDITION

17. Somme de plusieurs nombres entiers. — Si nous considérons plusieurs nombres entiers qui indiquent combien il y a d'objets dans divers groupes, et que nous réunissions ensuite tous ces groupes en un seul, le nombre qui désigne combien il y a d'objets dans ce groupe s'appelle la *somme* des autres nombres entiers.

Les objets des divers groupes peuvent être de même espèce ou non; cela n'importe pas, pourvu que l'on n'ait pas d'autre but que de les compter. Il peut encore être question, au lieu de groupes d'objets, de grandeurs contenant toutes un nombre exact de fois leur unité, pourvu que l'on veuille seulement savoir combien il y a d'unités dans chacune d'elles et dans leur ensemble.

C'est même à ce dernier point de vue que nous nous placerons habituellement, et nous regarderons dorénavant un nombre entier comme indiquant combien il y a d'unités dans une grandeur déterminée.

18. Définition de l'addition. — Cas simples. — *L'addition est une opération de l'arithmétique qui a pour but, étant donnés plusieurs nombres entiers, de trouver la somme de ces nombres.*

S'il s'agit simplement d'ajouter un à un nombre entier quelconque, le résultat est le nombre immédiatement suivant : ainsi 5 et 1 font 6, 7 et 1 font 8, 19 et 1 font 20.

Il suffit, pour faire cette opération, de connaître simplement la suite des nombres entiers, ou de savoir compter, comme on dit plus habituellement.

S'il s'agit d'ajouter deux à un nombre entier, on fait deux fois de suite cette opération. Exemples : au lieu de 5 et 2, on dit 5 et 1 font 6, 6 et 1 font 7; au lieu de 8 et 2, on dit 8 et 1 font 9, 9 et 1 font 10; au lieu de 25 et 2, on dit 25 et 1 font 26, 26 et 1 font 27; etc.

D'une manière générale, s'il s'agit d'ajouter un petit nombre, tel que 5, par exemple, à un nombre quelconque, on ajoute au second successivement toutes les unités contenues dans le premier; ainsi pour ajouter 5 à 31, on dit 31 et 1 font 32, 32 et 1 font 33, 33 et 1 font 34, 34 et 1 font 35, 35 et 1 font 36.

Mais il vaut mieux, pour les commençants, apprendre par cœur tous les résultats de l'addition de deux nombres inférieurs à 10, et se servir de ces résultats pour effectuer rapidement une addition quelconque, ainsi qu'il sera exposé plus tard.

19. **Table d'addition.** — Tous les résultats dont nous parlons peuvent être mis dans un tableau, appelé *table d'addition*. Pour former ce tableau, on trace un carré, dont on divise les deux côtés en 10 parties égales, d'une façon approchée; on mène par les points de division de l'un des côtés des droites parallèles aux côtés du carré du second couple, par les points de division de l'un des côtés de ce second couple, on mène des parallèles aux côtés du premier couple; on forme ainsi 10 lignes horizontales de 10 cases chacune, et dans ces cases on met les résultats qu'il faut connaître et retenir; dans la première ligne, on met les 10 premiers nombres entiers, en commençant par 0,

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

dans la seconde, ceux-ci augmentés d'une unité,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10:

dans la troisième, ceux-ci augmentés d'une unité,

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11;

et ainsi de suite. Il est visible alors que le nombre de la colonne marquée 6, en haut, et situé dans la ligne marquée 5, à gauche, est le nombre 6 augmenté de 5 unités, c'est-à-dire la somme de 6 et 5; d'une manière générale, la somme de deux nombres d'un seul chiffre est située à l'intersection des deux lignes différentes, horizontale et verticale, marquées par ces chiffres.

TABLE D'ADDITION :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Mais pour les commençants il vaut mieux disposer ce tableau de la façon suivante, et le leur faire répéter, jusqu'à ce qu'ils le sachent parfaitement.

TABLE D'ADDITION :

0 et 1 font 1	0 et 4 font 4	0 et 7 font 7
1 — 1 — 2	1 — 4 — 5	1 — 7 — 8
2 — 1 — 3	2 — 4 — 6	2 — 7 — 9
3 — 1 — 4	3 — 4 — 7	3 — 7 — 10
4 — 1 — 5	4 — 4 — 8	4 — 7 — 11
5 — 1 — 6	5 — 4 — 9	5 — 7 — 12
6 — 1 — 7	6 — 4 — 10	6 — 7 — 13
7 — 1 — 8	7 — 4 — 11	7 — 7 — 14
8 — 1 — 9	8 — 4 — 12	8 — 7 — 15
9 — 1 — 10	9 — 4 — 13	9 — 7 — 16
0 et 2 font 2	0 et 5 font 5	0 et 8 font 8
1 — 2 — 3	1 — 5 — 6	1 — 8 — 9
2 — 2 — 4	2 — 5 — 7	2 — 8 — 10
3 — 2 — 5	3 — 5 — 8	3 — 8 — 11
4 — 2 — 6	4 — 5 — 9	4 — 8 — 12
5 — 2 — 7	5 — 5 — 10	5 — 8 — 13
6 — 2 — 8	6 — 5 — 11	6 — 8 — 14
7 — 2 — 9	7 — 5 — 12	7 — 8 — 15
8 — 2 — 10	8 — 5 — 13	8 — 8 — 16
9 — 2 — 11	9 — 5 — 14	9 — 8 — 17
0 et 3 font 3	0 et 6 font 6	0 et 9 font 9
1 — 3 — 4	1 — 6 — 7	1 — 9 — 10
2 — 3 — 5	2 — 6 — 8	2 — 9 — 11
3 — 3 — 6	3 — 6 — 9	3 — 9 — 12
4 — 3 — 7	4 — 6 — 10	4 — 9 — 13
5 — 3 — 8	5 — 6 — 11	5 — 9 — 14
6 — 3 — 9	6 — 6 — 12	6 — 9 — 15
7 — 3 — 10	7 — 6 — 13	7 — 9 — 16
8 — 3 — 11	8 — 6 — 14	8 — 9 — 17
9 — 3 — 12	9 — 6 — 15	9 — 9 — 18

20. **Addition d'un nombre quelconque et d'un nombre d'un seul chiffre.** — On partage le plus grand des nombres en unités, dizaines, centaines, etc. Cela fait, on ajoute aux unités ordinaires de ce nombre le second nombre ; si le résultat obtenu est plus petit que 10, il constitue les unités de la somme, que l'on peut alors immédiatement lire et écrire, d'après les règles de la numération ; si ce résultat est supérieur à 10, il contient une dizaine et des unités ; on enlève cette dizaine, pour la mettre avec les dizaines qui ont été mises à part, et on peut alors, en général, immédiatement lire et écrire la somme demandée. Exemples :

243 et 6 font 249,
247 et 7 font 254.

Si, en procédant ainsi, on obtient dix dizaines, on en fait une centaine, que l'on ajoute aux centaines mises à part ; et ainsi de suite. Exemple :

1997 et 8 font 2005.

Il est à peine besoin d'ajouter que toutes ces opérations se font par la pensée, rapidement, et sans laisser de traces dans le discours.

Cette opération et la suivante reposent sur le principe suivant, qui est évident :

On n'altère pas la somme de plusieurs nombres, en décomposant chacun d'eux en groupes d'unités d'une façon quelconque, pourvu que dans tous ces groupes, pris ensemble, il y ait le même nombre d'unités que dans le nombre décomposé.

21. **Addition de nombres entiers quelconques.** — On décompose chacun des nombres en unités, dizaines, centaines, etc. ; puis on fait la somme des unités des divers nombres ; si cette somme ne surpasse pas 9, c'est le chiffre des unités de la somme cherchée ; si elle surpasse 9, on la décompose en unités et en dizaines (ex. : 247 contient 7 unités et 24 dizaines) ; on garde alors le chiffre des unités

ainsi obtenu et on retient les dizaines pour les ajouter aux dizaines des divers nombres ; on fait alors la somme de toutes ces dizaines ; si le résultat obtenu ne surpasse pas 9, c'est le chiffre des dizaines de la somme cherchée ; si ce résultat surpasse 9, on le décompose en unités et en dizaines ; les unités actuelles donnent le chiffre des dizaines de la somme cherchée, et les dizaines actuelles sont des dizaines de dizaines, c'est-à-dire des centaines que l'on retient pour les ajouter aux centaines des divers nombres ; et ainsi de suite.

Tout ce que nous venons de dire découle immédiatement de l'idée d'addition et de la numération, et nous conduit à la règle suivante :

Règle. — *Il faut écrire les divers nombres les uns au-dessous des autres, de façon que les unités de même ordre soient dans une même colonne verticale, et commencer l'opération par la droite ; on trace au-dessous de tous ces nombres une ligne horizontale, et on fait la somme de tous les chiffres contenus dans une même colonne ; on n'écrit au-dessous de cette colonne que le chiffre des unités ; on retient les dizaines pour les ajouter à la colonne qui est à gauche de celle-ci ; et ainsi de suite. Quand on arrive à la dernière colonne, on écrit intégralement au-dessous le résultat obtenu.*

Dans chaque colonne, on fait la somme de proche en proche et dans un ordre quelconque, car on n'altère évidemment pas le nombre des unités contenues dans un ensemble de nombres ou groupes en transposant ces groupes. Exemple : soient à ajouter 25631, 48927, 504, 75028, 27 et 8096.

25631
48927
504
75028
27
8096
158213

L'opération est indiquée à côté : on dit : 1 et 7, 8, 8 et 4, 12, 12 et 8, 20, 20 et 7, 27, 27 et 6, 33 ; j'écris 3 et je retiens 3 ; 3 et 3, 6, 6 et 2, 8, 8 et 2, 10, 10 et 2, 12, 12 et 9, 21 ; j'écris 1 et je retiens 2 ; 2 et 6, 8, 8 et 9, 17, etc.

22. **Preuve de l'addition.** — On appelle *preuve* d'une opération, toute autre opération qui a pour but de s'assurer de l'exactitude de cette opération.

Une preuve de ce genre n'est jamais absolue, car on peut commettre des erreurs aussi bien dans la seconde opération que dans la première.

Pour vérifier une addition, on la recommence en écrivant les nombres dans un autre ordre, par exemple en comptant de bas en haut, si on a compté de haut en bas. Si on trouve le même résultat, il y a de fortes présomptions pour que l'opération soit juste.

23. **Propriétés de l'addition.** — Le signe de l'addition est le signe $+$; ce signe se lit *plus*; ainsi $5+4$ indique qu'il faut ajouter 4 et 5, ou 5 et 4; on indique le résultat en le séparant de ce groupe par le signe $=$, qui se lit *égale*; ainsi

$$5+4=9.$$

Cet ensemble constitue une *égalité*, $5+4$ est le *premier membre*, 9, le *second membre de l'égalité*.

Lorsque, dans une proposition quelconque, ce que l'on suppose relativement à un nombre n'a pas lieu seulement pour un nombre isolé, mais pour beaucoup d'autres, et même pour une infinité, on désigne l'un quelconque de ces nombres par une lettre de l'alphabet, A, par exemple. S'il s'agit d'un nombre qui contienne un nombre exact de fois 10, A sera l'un quelconque des nombres de la suite infinie

$$10, 20, 30, 40, 50, \ldots\ldots$$

Pour exprimer que le nombre entier C est la somme des nombres entiers A et B, on écrit

$$A+B=C.$$

Si nous considérons plusieurs groupes d'objets que nous voulons réunir en un seul groupe, peu importe l'ordre dans lequel nous ferons cette opération, le nombre total des

objets n'en dépend d'aucune façon ; nous pourrons en outre, avant de les réunir tous, réunir entre eux plusieurs groupes ; cela n'altérera pas non plus le nombre total des objets. L'addition jouit donc des deux propriétés suivantes, qui sont fondamentales :

1° Elle est *commutative*, c'est-à-dire qu'on peut, dans une addition de nombres entiers, changer l'ordre de ces nombres, sans troubler le résultat. Si l'on désigne par A, B, C, D, etc. des nombres entiers quelconques, cette propriété s'exprime ainsi :

$$A+B = B+A$$

ou

$$A+B+C+D = B+A+D+C.$$

Cette propriété sert à faire la preuve d'une addition quelconque par une autre addition portant sur les mêmes nombres écrits dans un autre ordre.

2° Elle est *associative*, c'est-à-dire que si l'on commence par faire des sommes partielles, avec certains de ces nombres, la somme de ces sommes est la somme totale. Cette propriété s'exprime ainsi :

$$A+B+C = A+(B+C)$$

ou

$$A+B+C+D+E = A+(B+C+D)+E,$$

$(B+C)$ désignant la somme de B et de C.

On se sert de cette propriété pour remplacer une addition trop longue par plusieurs additions plus courtes, dans lesquelles les chances d'erreurs sont moindres.

3° Enfin l'addition jouit de la propriété

$$A+0 = A,$$

qui résulte de la définition du nombre 0.

24. Inégalités. — Si le nombre entier A vient après le nombre entier B, dans la suite naturelle des nombres entiers, on dit que A est *plus grand* que B, ou que B est *plus petit* que A. On se sert des signes $>$ et $<$, pour exprimer

ces deux modes de comparaison ; ces signes se lisent : *plus grand que*, et *plus petit que*, et l'on écrit :

$$A > B \quad \text{ou} \quad B < A ;$$

exemples : $12 > 7$, $6 < 15$.

Un pareil ensemble de deux nombres constitue une *inégalité;* celui qui est à gauche est le *premier membre* de l'inégalité ; l'autre, le *second membre.* Autre exemple :

$$5 + 2 + 7 + 1 < 20 + 6 ;$$

le premier membre est $5+2+7+1$, le second, $20+6$; le signe $<$ indique ici le *sens* de l'inégalité.

Si un nombre entier A est plus grand qu'un nombre entier B, il est la somme de B et d'un certain nombre d'unités, *c'est-à-dire la somme de* B *et d'un nombre entier* C. Réciproquement, si un nombre A est la somme de B et de C, il vient après B dans la suite naturelle des nombres entiers et il est *plus grand que* B. Ainsi l'égalité

$$A = B + C \quad \text{et l'inégalité} \quad A > B$$

s'entraînent mutuellement, en désignant par C un certain nombre entier.

CHAPITRE III

SOUSTRACTION

25. Définition de la soustraction. — Signe de la soustraction. — La soustraction est l'opération inverse de l'addition; *elle a pour but, étant donnés deux nombres entiers* A *et* B, *de trouver le nombre* C *qu'il faut ajouter à* B *pour avoir* A.

Ce nombre C s'appelle *reste, excès* ou *différence*. Exemple: le nombre qu'il faut ajouter à 7 pour avoir 11 est 4; 4 est donc le reste de 11 diminué de 7, l'excès de 11 sur 7, la différence entre 11 et 7.

Pour soustraire un nombre B d'un nombre A, on l'écrit à la suite de A, en les séparant par le signe —, qui se lit *moins*; l'opération est alors indiquée. Quand on a le résultat, on le met à la suite, après le signe =. Exemple:

$$11 - 7 = 4;$$

d'une manière générale : $A - B = C$.

La soustraction n'est pas toujours possible; il résulte en effet de la définition que B doit être plus petit que A; car si B est plus grand que A, il n'y a aucun nombre entier qui ajouté à B reproduise A. On ne peut donc retrancher ou soustraire d'un nombre aucun nombre plus grand que lui.

26. Cas où le reste est un nombre d'un seul chiffre. — Dans le cas où les deux nombres entiers sont peu différents, où le reste n'a qu'un seul chiffre, il suffit d'être familiarisé avec l'addition pour apercevoir de suite quel est le reste. Exemple : on voit de suite que $496 - 489$ est égal à 7.

On peut, du reste, commencer par des nombres plus simples, des nombres qui sont compris dans la table d'addition ; ainsi, pour soustraire 7 de 11, il suffit de penser que 7 et 4 font 11, et le reste est 4. On peut aussi enlever successivement 7 unités de 11, soit en comptant sur ses doigts, soit autrement.

Le cas général se ramène à celui-ci.

27. **Cas général.** — 1° Supposons d'abord que tous les chiffres du nombre à soustraire soient inférieurs aux chiffres correspondants dans l'autre nombre ; il suffit alors de les retrancher de ceux-ci pour obtenir le résultat. En effet, en procédant ainsi, on a enlevé des unités du plus grand nombre celles du plus petit, des dizaines du plus grand nombre, celles du plus petit, etc. ; on a donc bien enlevé finalement du premier nombre toutes les unités contenues dans le second, et par conséquent le nombre qui reste, étant ajouté au second, reproduira le premier ; donc c'est le reste.

Pour faire l'opération, on écrit le plus petit nombre au-dessous du plus grand, on tire un trait horizontal, et au-dessous on met le résultat ; il faut faire en sorte que les unités de même ordre soient dans la même colonne verticale. Exemple : soit à soustraire 46321 de 89746 ; l'opération est

$$\begin{array}{r} 89746 \\ 46321 \\ \hline 43425 \end{array}$$

et se lit ainsi : 1 de 6 reste 5, 2 de 4 reste 2, 3 de 7 reste 4, 6 de 9 reste 3, 4 de 8 reste 4.

Dans le cas actuel, l'opération peut être commencée indifféremment par la droite ou par la gauche, car ce n'est pas autre chose qu'une suite de soustractions isolées et simples, qui se font indépendamment les unes des autres.

2° Supposons que parmi les chiffres du nombre à sous-

traire il y en ait de plus forts que les chiffres correspondants de l'autre nombre. Nous procéderons alors comme précédemment, retranchant du chiffre des unités du plus grand nombre le chiffre des unités du plus petit, du chiffre des dizaines, le chiffre des dizaines du second nombre; seulement quand nous serons en face d'une soustraction partielle impossible à effectuer, nous augmenterons de dix unités le chiffre du premier nombre, et nous ferons alors la soustraction que nous n'avions pu faire ; puis, pour ne rien changer, nous ajouterons aussi dix unités du même ordre ou bien une unité de l'ordre immédiatement supérieur, au second nombre, de telle sorte que le chiffre suivant du nombre à soustraire sera augmenté de un.

Cette façon de procéder repose sur le principe suivant :

Si l'on ajoute à deux nombres le même nombre d'unités, leur différence n'est pas altérée.

En effet, on peut partager le plus grand nombre en deux autres, l'un contenant le même nombre d'unités que le plus petit, et l'autre, égal au reste. Cela fait, si l'on ajoute le même nombre d'unités aux deux nombres entiers, cela peut se faire, pour le plus grand des deux, en ajoutant ces unités à la partie égale au plus petit nombre; l'autre partie, qui est le reste, ne sera donc pas changée.

L'opération que nous venons d'exposer doit être commencée par la droite, puisque les chiffres du nombre à soustraire sont susceptibles d'altération, et que cela ne peut s'apercevoir, dans chaque cas, qu'une fois la soustraction partielle, portant sur les unités d'ordre immédiatement inférieur, effectuée. L'opération se dispose du reste comme dans le cas précédent. Exemple : soit à soustraire 75986 de 112428; nous écrirons 75986 au dessous de 112428, de façon que les unités de même ordre soient dans la même colonne,

$$\begin{array}{r} 112428 \\ 75986 \\ \hline 36442 \end{array}$$

et nous dirons : 6 de 8 reste 2, 8 de 12 reste 4, et je retiens 1, 1 et 9, 10, 10 de 14 reste 4, et je retiens 1, 1 et 5, 6, 6 de 12 reste 6, etc...

Dans la pratique, on fait diverses abréviations, par exemple on peut supprimer le mot reste, qu'il est inutile de répéter à chaque fois, on peut ajouter l'unité de retenue sans le dire, etc.

28. **Preuve de la soustraction.** — Pour faire la preuve de la soustraction, il suffit d'ajouter le reste au nombre à soustraire ; on doit retrouver ainsi l'autre nombre.

On peut aussi changer un peu la manière d'effectuer la soustraction, dans le cas où il y a des chiffres dans le nombre à soustraire plus forts que ceux qui leur correspondent dans l'autre; en effet, au lieu d'ajouter par la pensée une unité au chiffre immédiatement à gauche dans le premier nombre, on peut enlever par la pensée cette unité du chiffre correspondant, dans le second nombre. Si l'opération, ainsi faite, donne le même résultat que la première, c'est une présomption en faveur de l'exactitude. Reprenons l'exemple précédent : soit à soustraire 75986 de 112428 ; nous disposons l'opération comme précédemment et nous

$$\begin{array}{r} 112428 \\ 75986 \\ \hline 36442 \end{array}$$

disons : 6 de 8, 2, 8 de 12, 4, 9 de 13, 4, 5 de 11, 6, 7 de 10, 3.

29. **Propriétés simples des égalités.** — Si à deux groupes d'objets contenant le même nombre d'objets, on ajoute deux autres groupes contenant aussi le même nombre d'objets, il est évident que les nouveaux groupes contiendront encore le même nombre d'objets ; donc *une égalité n'est pas altérée si on ajoute aux deux membres le même nombre ; ainsi les deux égalités*

$$A = B \qquad \text{et} \qquad A + C = B + C$$

sont équivalentes.

On verrait de même que l'*on n'altère pas une égalité en retranchant le même nombre des deux membres*; ainsi

$$A = B \qquad \text{et} \qquad A - C = B - C$$

sont deux égalités équivalentes.

Il résulte encore de la définition de la soustraction que les deux égalités

$$A = B + C \qquad \text{et} \qquad A - B = C$$

sont équivalentes; mais cela résulte aussi de la seconde propriété, car si on retranche le nombre B des deux membres de la première égalité, on trouve la seconde.

On peut ajouter membre à membre plusieurs égalités et on obtient une nouvelle égalité.

En effet, si les deux nombres A et B sont égaux, cela veut dire qu'ils contiennent autant d'unités l'un que l'autre, lorsque les opérations qui concourent à les former sont effectuées. Si on leur ajoute respectivement deux nombres égaux A′ et B′, on obtient évidemment de nouveaux nombres égaux aussi, pourvu que l'on ne change pas l'ordre des opérations à effectuer. A ces nouveaux nombres, on pourra aussi ajouter respectivement des nombres égaux A″ et B″, etc. Ainsi :

$$A = B, \qquad A' = B', \qquad A'' = B'', \ (*)$$

entraînent $A + A' + A'' + \cdots\cdots = B + B' + B'' + \cdots\cdots$

Si on ajoute le même nombre à deux nombres distincts, leur différence ne change pas; il en résulte qu'*on peut ajouter aux deux membres d'une inégalité le même nombre sans que le sens de cette inégalité soit changé.*

(*) On expliquera plus loin le sens exact qu'il faut attacher à une égalité entre nombres entiers (nº 57).

Ainsi, les deux inégalités :

$$A < B \qquad \text{et} \qquad A + C < B + C$$

ont lieu en même temps.

De même, *si l'on retranche des deux membres d'une inégalité un même nombre moindre que chacun de ceux qui la composent, on obtient encore une inégalité de même sens que la première.*

Si l'on a plusieurs inégalités de même sens, on obtient encore une inégalité de même sens en les ajoutant membre à membre.

Ainsi les inégalités

$$A < B, \qquad A' < B', \qquad A'' < B'', \qquad \ldots,$$

entraînent la nouvelle inégalité :

$$A + A' + A'' + \ldots < B + B' + B'' + \ldots$$

car écrire

$$A < B, \qquad A' < B', \qquad A'' < B'' \qquad \ldots,$$

c'est affirmer qu'il y a des nombres $C, C', C'', \ldots$, tels que :

$$B = A + C, \qquad B' = A' + C', \qquad B'' = A'' + C'', \qquad \ldots;$$

par conséquent, d'après ce que nous avons vu plus haut, nous avons

$$(B + B' + B'' + \ldots) = (A + A' + A'' + \ldots) + (C + C' + C'' + \ldots),$$

et de là, il suit que

$$A + A' + A'' + \ldots < B + B' + B'' + \ldots.$$

Les égalités et les inégalités en arithmétique s'appliquent surtout à des nombres entiers non encore formés qui sont indiqués par certains modes de composition et de décomposition. Il est bien évident qu'il n'y aurait aucun intérêt à écrire simplement que $7 = 7$ ou que $6 < 7$. Ces relations ne seront écrites et considérées que lorsqu'il y aura lieu de les combiner avec d'autres en vertu des principes précédents ou de principes analogues.

Exemple : $5 + 7 + 3 = 18 - 3$, $2 + 4 - 3 = 7 - 4$,

$8 - 7 = 12 - 6 + 5 - 10$ entraînent

$$5 + 7 + 3 + 2 + 4 - 3 + 8 - 7 = 18 - 3 + 7 - 4 + 12 - 6 + 5 - 10;$$

l'expression $12 - 6 + 5 - 10$ indique qu'il faut retran-

cher 6 de 12, au résultat ajouter 5, et de ce résultat retrancher 10.

Nous démontrerons plus tard (n° 32) que l'on peut faire les opérations ainsi indiquées dans un autre ordre.

* 30. **Nombres entiers négatifs.** — Nous avons vu antérieurement que si les deux nombres entiers A et B sont donnés, $A > B$, l'égalité $B + C = A$ définit un nombre entier, C, et un seul, qui est la différence entre A et B; ce nombre contient autant d'unités qu'il en manque à B pour valoir A. Mais, si B est plus grand que A, l'égalité précédente ne définit plus de nombre entier, C; si l'on veut qu'elle soit encore satisfaite, il faut créer un nouveau symbole numérique, auquel on étendra le plus grand nombre des propriétés des nombres entiers que l'on pourra, tout en lui donnant au moins une propriété nouvelle qui rende possible la soustraction indiquée par $A - B$. Pour ne pas altérer les règles de calcul relatives aux égalités, il faudra procéder de telle sorte que les égalités

$$B + C = A \quad \text{et} \quad B = A - C \quad \text{ou} \quad C = A - B$$

restent équivalentes.

Puisque $B > A$, la différence $B - A$ existe; soit C' cette différence, de sorte que $C' = B - A$; le nombre entier A ajouté au nombre entier C' reproduisant B, on peut dire aussi que A est la différence entre B et C' et écrire $A = B - C'$; c'est de là que nous allons déduire la définition du symbole nouveau, en nous astreignant à ce que l'égalité $A = B + C$ soit équivalente à l'égalité $A = B - C'$; il faudra, pour cela, poser $C = -C'$, regarder le signe $-$ comme étant adjoint au nombre C', comme faisant partie intégrante du symbole nouveau, et convenir que $B + (-C')$ se calculera comme $B - C'$. Ce nouveau symbole s'appelle un *nombre négatif*, et il jouit nécessairement de la propriété suivante, qui sera étendue:

Pour ajouter à un nombre positif ordinaire un nombre négatif, contenant, abstraction faite du signe, moins d'unités que lui, il faut effectuer la soustraction indiquée par le signe —, comme si ce signe existait seul.

Les nombres ordinaires se nomment des *nombres positifs*, terme déjà employé. On les regarde comme précédés du signe $+$, même quand ce signe n'est pas écrit. Nous voyons donc que les signes $+$ et $-$ ne sont pas seulement des indicateurs d'opérations, mais aussi des éléments constitutifs des nombres positifs et négatifs. Il nous reste maintenant à indiquer les propriétés de calcul de ces nombres, c'est-à-dire à indiquer comment ces nombres se combinent par voie d'addition ou de soustraction. Le commençant devra faire la plus grande attention à toute super-

position des signes $+$ et $-$, le premier indiquant une opération, le second un signe afférent à un nombre.

La *valeur absolue* d'un nombre est la valeur numérique de ce nombre, abstraction faite de son signe. Un nombre positif est identique à sa valeur absolue, ou se comporte comme si cela était. (Voir la suite.)

Revenons maintenant à l'égalité $A = B + C$, qui définit, dans tous les cas, un nombre entier, positif ou négatif, C, pourvu que A et B soient des entiers positifs donnés. Nous la regarderons comme étant toujours équivalente à l'égalité $C = A - B$. Il est naturel de représenter le second membre par $A + (-B)$, comme nous avons déjà agi dans un cas ; mais alors, pour avoir la valeur de $C = -C'$, nous serons conduit à formuler la loi suivante, qui contient la première propriété, comme cas particulier, et qui est plus générale qu'elle :

Pour faire la somme de deux nombres, l'un positif, l'autre négatif, on fait la différence de leurs valeurs absolues et on donne au résultat le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que la plus grande valeur absolue appartient au nombre positif ou au nombre négatif.

L'énoncé de cette loi étant indépendant de l'ordre des deux parties de la somme, on peut, sans altérer le résultat, échanger les deux nombres, et on a $A + (-B) = -B + A$, ou $A - B = -B + A$, en supprimant le signe intermédiaire, qui est un signe d'opération. (*)

* 31. **Suite des propriétés des nombres négatifs.** — *Lorsque le nombre* A *est négatif, et le nombre* B *positif, l'égalité* $A = B + C$ *définit un nombre* C *négatif.*

En effet, d'après la loi précédente, pour obtenir le nombre négatif A, il faut ajouter au nombre positif B un nombre négatif C, dont la valeur absolue contienne d'abord les unités de A, puis celles de B ; donc, en désignant par $|A|$ la valeur absolue d'un nombre entier A quelconque, positif ou négatif, nous aurons $|C| = |A| + B$ et $C = -|C|$.

Cela posé, dans un but de généralisation facile à comprendre, nous écrirons toujours $C = A - B = A + (-B)$. Donc :

Pour faire la somme de deux nombres négatifs, on fait la somme de leurs valeurs absolues et on donne au résultat le signe $-$.

Supposons maintenant A positif et B négatif ; *alors l'égalité conditionnelle* $A = B + C$ *définit un nombre positif* C.

En effet, pour avoir A, il faut ajouter à B un nombre positif

(*) Cette loi n'est pas la traduction exacte des conventions que l'on vient de faire : elle contient, en outre, une généralisation.

qui contienne d'abord les unités de la valeur absolue de B, lesquelles seront détruites par le nombre B, d'après la loi fondamentale d'addition d'un nombre positif et d'un nombre négatif; puis ce nombre doit contenir en outre les unités de A; donc $C = A + |B|$. Or nous écrirons toujours $C = A - B$, ainsi qu'il a été convenu; donc nous arrivons à la règle suivante :

Pour retrancher d'un nombre positif quelconque un nombre négatif quelconque, on fait la somme des valeurs absolues.

Il nous reste à examiner un dernier cas, le cas où A et B sont négatifs. Si $|A| > |B|$, il faut ajouter à B un nombre négatif qui contienne, abstraction faite du signe, autant d'unités qu'il en manque à $|B|$ pour valoir $|A|$; donc $C = |B| - |A| = A + |B|$. Si, au contraire, $|A| < |B|$, il faudra ajouter à B un nombre qui fasse disparaître de sa valeur absolue les unités qu'il a en plus que $|A|$, c'est-à-dire un nombre positif égal à $|B| - |A|$; on a donc encore $C = |B| - |A| = |B| + A$.

Or si nous revenons à l'égalité conventionnelle $C = A - B$, et que nous posions $B = -B'$, nous voyons que

$$C = A - (-B') = A + B' \quad (B' = |B|).$$

De là, la règle suivante, qui comprend celle qui précède :

Pour soustraire d'un nombre quelconque un nombre négatif, on ajoute au premier la valeur absolue du second. (*)

Nous connaissons maintenant tout ce qui est relatif à la somme de deux nombres quelconques, positifs ou négatifs, et à leur différence, et nous pouvons rappeler en peu de mots tout ce qui est relatif à la combinaison des deux signes + et — : + sur + donne +, + sur — donne —, — sur + donne —, — sur — donne +; mais le premier signe transforme le second en un signe d'opération, en attachant aux opérations d'addition et de soustraction le sens complet qui a été trouvé plus haut.

* 32. **Sommes algébriques.** — On appelle *somme algébrique* une somme de nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs, A, B, C, D, ... K, L :

$$S = A + B + C + \cdots + K + L.$$

Pour avoir S, on procède, *par définition*, de la manière suivante : on ajoute B à A, d'après les règles trouvées antérieurement, puis au résultat on ajoute C, etc., jusqu'à ce que l'on ait ajouté L à la somme effectuée $A + B + C + \cdots + K$.

Pour abréger l'écriture, on remplace toujours deux signes superposés par un seul, d'après les règles données antérieurement.

Plaçons dans un tableau spécial, au fur et à mesure que nous

(*) Ou plutôt on ajoute au premier le nombre positif qui a même valeur absolue que le second.

les rencontrerons, les unités des nombres positifs, et, dans un autre tableau, les unités des nombres négatifs, ou plutôt les unités de leurs valeurs absolues ; appelons ces deux tableaux, pour abréger, le *tableau positif* et le *tableau négatif*. Nous mettrons d'abord les unités de $|A|$ dans le tableau positif ou dans le tableau négatif, suivant que A est positif ou négatif; puis les unités de $|B|$ dans le même tableau, si A et B ont le même signe, dans l'autre tableau, si B est de signe contraire à A ; dans le premier cas, le nombre inscrit dans le tableau contenant seul des unités est $A+B$; dans le second cas, nous barrons autant d'unités dans un tableau que dans l'autre, jusqu'à ce que l'un des tableaux ne renferme plus aucune unité ; le nombre inscrit dans le tableau qui contient des unités non barrées est $A+B$.

Nous placerons ensuite les unités de $|C|$ dans le tableau correspondant ; si ces unités ont été mises dans le tableau contenant des unités non barrées, le nombre inscrit dans ce tableau est $A+B+C$; sinon, on barre encore autant d'unités dans l'un des tableaux que dans l'autre, jusqu'à ce que l'un d'eux ne contienne que des unités barrées ; le nombre inscrit dans le tableau contenant des unités non barrées est $A+B+C$; si les deux tableaux ne contenaient que des unités barrées, ce nombre serait 0 et on aurait $A+B+C=0$. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les nombres aient été employés. Or, au lieu d'opérer ainsi, on peut mettre d'abord dans le tableau positif les unités de tous les nombres positifs, puis, dans le tableau négatif, les unités de tous les nombres négatifs ; on barre ensuite autant d'unités dans l'un des tableaux que dans l'autre, jusqu'à ce que l'un d'eux ne contienne plus d'unités ; le nombre inscrit dans l'autre tableau, pris avec le signe correspondant, est la somme S ; car il revient au même de barrer toutes les unités communes en une fois ou en plusieurs. On déduit de là la règle suivante, qui est très importante :

Pour obtenir la valeur d'une somme algébrique S, *on fait la somme de tous les nombres positifs qu'elle contient,* S_1, *puis on fait la somme de tous les nombres négatifs,* $-S_2$, *on prend la différence* S_1-S_2 *ou* S_2-S_1 *et on donne au résultat le signe* $+$ *ou le signe* $-$, *suivant que le nombre le plus grand des deux est* S_1 *ou* S_2 *; s'ils sont égaux,* $S=0$.

Cette règle ne dépend aucunement de l'ordre des termes : donc, dans une somme algébrique, on peut intervertir l'ordre des termes d'une façon quelconque ; en d'autres termes, cette nouvelle addition, plus générale que l'addition arithmétique, est aussi une *opération commutative*.

On peut aussi, sans rien changer, réunir plusieurs termes consécutifs en un seul ; car cela ne change rien au nombre des unités barrées dans chaque tableau, si on les écrit toutes ; en

d'autres termes, l'addition actuelle est une *opération associative.*

Enfin on a $S + 0 = S$, et $A + (-A) = 0$.

Telles sont les propriétés fondamentales de l'addition que nous avons définie dans ce paragraphe.

On peut y ajouter les deux suivantes :

1° *Pour faire la somme de plusieurs sommes algébriques, on les écrit les unes à la suite des autres, en gardant à chacun des nombres qui les composent son signe.*

En effet, chaque somme donne naissance à deux tableaux, le tableau positif et le tableau négatif, l'un ne contenant que des unités barrées et l'autre représentant à l'aide de ses unités non barrées la valeur de la somme algébrique. Pour les ajouter entre elles, il suffit de réduire les tableaux qui contiennent des unités non barrées à ces unités, et de former avec eux de la même manière que précédemment deux nouveaux tableaux, positif et négatif, puis de barrer autant d'unités dans l'un que dans l'autre, jusqu'à ce que l'un d'eux ne contienne plus que des unités barrées. Mais on arrivera au même résultat, si l'on rétablit les unités que l'on avait barrées antérieurement, tout en les conservant barrées ; c'est-à-dire si l'on écrit dans un tableau positif toutes les unités des nombres positifs, dans un tableau négatif toutes les unités des nombres négatifs, et si on barre ensuite autant d'unités dans l'un des tableaux que dans l'autre, jusqu'à ce que l'un d'eux ne contienne plus d'unités non barrées. Mais on obtient ainsi la somme algébrique formée avec tous les nombres.

2° *Pour retrancher une somme algébrique d'une autre somme algébrique, on écrit à la suite des nombres de celle-ci tous ceux de la première, changés de signe.*

En effet, la soustraction se fait en changeant le signe de la seconde somme (nos 30 et 31), ce qui revient à échanger son tableau positif avec le tableau négatif.

CHAPITRE IV

MULTIPLICATION

33. Définition de la multiplication. — *La multiplication a pour but, étant donnés deux nombres,* A *et* B, *de trouver un troisième nombre,* C, *qui contienne autant de fois le nombre* A *qu'il y a d'unités dans* B *ou, si l'on veut, de répéter* A, B *fois, de trouver la somme de* B *nombres égaux à* A.

Le nombre A s'appelle le *multiplicande*, le nombre B le *multiplicateur*, et le nombre C est le *produit*. On indique la multiplication par le signe $\times$, qui se lit *multiplié par*, et on écrit

$$A \times B = C.$$

Exemple : multiplier 7 par 5, c'est répéter 7, 5 fois, c'est faire la somme de 5 nombres égaux à 7; on a ainsi

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35;$$

7 est le multiplicande, 5 le multiplicateur, 35 le produit, et on a

$$7 \times 5 = 35.$$

La multiplication n'est pas autre chose qu'une addition dans laquelle les nombres employés sont égaux; on pourrait donc faire toute multiplication comme une addition, seulement quand il y aurait un grand multiplicateur, le nombre des parties de la somme serait grand et l'addition serait fort longue. Il a donc été utile de créer une opération

spéciale qui permette de trouver rapidement le produit de deux nombres donnés.

C'est cette opération que nous allons étudier et que nous nommerons la *multiplication*.

34. Table de multiplication. — Dans le cas où les deux nombres n'ont chacun qu'un seul chiffre, l'addition suffit à former le produit; mais il est indispensable, pour la suite, de savoir par cœur tous les produits analogues. Ces produits sont tous contenus dans un tableau qu'on appelle la *table de Pythagore* et qui a la forme d'un carré; ce carré se compose de 9 rangées de 9 cases chacune. Dans la première rangée, on place les 9 premiers nombres entiers,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

dans la seconde rangée, on place les produits de ceux-ci par 2, c'est-à-dire les nombres qu'on obtient en les ajoutant tous à eux-mêmes,

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18;

dans la troisième rangée, on place les produits des nombres de la première rangée par 3, c'est-à-dire les sommes obtenues en ajoutant les nombres de la première rangée à ceux de la seconde; dans la quatrième rangée, on met les produits des nombres de la première rangée par 4, c'est-à-dire les sommes obtenues en ajoutant les nombres de la première rangée à ceux de la troisième; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne la 9e rangée, qui contient les produits par 9 des nombres de la première. D'après cette façon de procéder, le produit d'un nombre d'un seul chiffre, A, par un nombre d'un seul chiffre, B, est dans la colonne verticale marquée A en haut, et dans la ligne horizontale marquée B, à gauche.

TABLE DE PYTHAGORE :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

REMARQUE. — Il est facile de voir à simple inspection que ce tableau est parfaitement symétrique par rapport à la première diagonale du carré, celle qui joint la case 1 à la case 81; c'est-à-dire que le nombre qui se trouve à l'intersection de la colonne A et de la ligne B est aussi à l'intersection de la ligne A et de la colonne B. Donc pour les nombres d'un seul chiffre on a

$$A \times B = B \times A.$$

Cette propriété sera démontrée pour un produit de deux nombres quelconques.

Mais, pour les commençants, il vaut mieux disposer de la façon suivante les résultats du tableau précédent :

Table de Multiplication :

1 fois 1 — 1	1 fois 4 — 4	1 fois 7 — 7
2 — 1 — 2	2 — 4 — 8	2 — 7 — 14
3 — 1 — 3	3 — 4 — 12	3 — 7 — 21
4 — 1 — 4	4 — 4 — 16	4 — 7 — 28
5 — 1 — 5	5 — 4 — 20	5 — 7 — 35
6 — 1 — 6	6 — 4 — 24	6 — 7 — 42
7 — 1 — 7	7 — 4 — 28	7 — 7 — 49
8 — 1 — 8	8 — 4 — 32	8 — 7 — 56
9 — 1 — 9	9 — 4 — 36	9 — 7 — 63
1 fois 2 — 2	1 fois 5 — 5	1 fois 8 — 8
2 — 2 — 4	2 — 5 — 10	2 — 8 — 16
3 — 2 — 6	3 — 5 — 15	3 — 8 — 24
4 — 2 — 8	4 — 5 — 20	4 — 8 — 32
5 — 2 — 10	5 — 5 — 25	5 — 8 — 40
6 — 2 — 12	6 — 5 — 30	6 — 8 — 48
7 — 2 — 14	7 — 5 — 35	7 — 8 — 56
8 — 2 — 16	8 — 5 — 40	8 — 8 — 64
9 — 2 — 18	9 — 5 — 45	9 — 8 — 72
1 fois 3 — 3	1 fois 6 — 6	1 fois 9 — 9
2 — 3 — 6	2 — 6 — 12	2 — 9 — 18
3 — 3 — 9	3 — 6 — 18	3 — 9 — 27
4 — 3 — 12	4 — 6 — 24	4 — 9 — 36
5 — 3 — 15	5 — 6 — 30	5 — 9 — 45
6 — 3 — 18	6 — 6 — 36	6 — 9 — 54
7 — 3 — 21	7 — 6 — 42	7 — 9 — 63
8 — 3 — 24	8 — 6 — 48	8 — 9 — 72
9 — 3 — 27	9 — 6 — 54	9 — 9 — 81

On fait répéter ce tableau au débutant jusqu'à ce qu'il en connaisse parfaitement toutes les parties.

35. Multiplication d'un nombre quelconque par un nombre d'un seul chiffre. – Si nous considérons un groupe quelconque d'objets contenant A objets et que nous voulions le répéter B fois, il sera indifférent, au point de vue du nombre des objets, de placer dans le groupe A ces objets d'une façon quelconque et même de les disposer en groupes contenant $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_k$ objets, pourvu que le nombre total des objets dans ce groupe, $A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_k$, soit toujours égal à A. On voit donc que pour multiplier par B un nombre quelconque A, on peut le partager en plusieurs parties que l'on multipliera respectivement par B, après quoi on fera la somme des résultats obtenus. Dans la pratique, *on partage le nombre* A *en unités, dizaines, centaines, etc., et on multiplie respectivement ces divers nombres par* B; *la somme des résultats obtenus est le produit demandé.* — *Exemple :* soit à multiplier 46934 par 7. On multiplie par 7 les 4 unités du nombre et on a pour résultat 28; par 7, les 3 dizaines ou les 30 unités représentées par des dizaines et on a pour résultat 21 dizaines ou 210 unités; de même 9 centaines multipliées par 7 donnent pour résultat 63 centaines (63 groupes de 100 objets chacun) ou 6300, etc. On a donc finalement à faire la somme

$$28 + 210 + 6300 + 42000 + 280000.$$

L'opération peut se disposer ainsi :

$$\begin{array}{r} 46934 \\ 7 \\ \hline 28 \\ 210 \\ 6300 \\ 42000 \\ 280000 \\ \hline 328538, \end{array}$$

les nombres compris entre les deux barres horizontales

étant les produits partiels qu'il faut ajouter les uns aux autres.

L'opération peut être abrégée en faisant les multiplications partielles en même temps que l'addition; il suffit pour cela de retenir à chaque fois les unités d'ordre supérieur à celles que l'on calcule et de les ajouter au produit partiel que donnent les unités situées immédiatement à gauche de celles-ci. L'opération est alors disposée ainsi :

$$\begin{array}{r} 46934 \\ 7 \\ \hline 328538, \end{array}$$

et on lit : 7 fois 4, 28, je pose 8 et je retiens 2, 7 fois 3, 21 et 2, 23, je pose 3 et je retiens 2, 7 fois 9, 63 et 2, 65, je pose 5 et je retiens 6, 7 fois 6, 42 et 6, 48, je pose 8 et je retiens 4, 7 fois 4, 28 et 4, 32; cette fois, l'opération étant terminée, j'écris 32 entièrement.

L'opération, ainsi simplifiée, doit être commencée par la droite; mais il est évident que si on garde la première forme, on peut aussi bien commencer par la gauche; et alors, on a :

$$\begin{array}{r} 46934 \\ 7 \\ \hline 280000 \\ 42000 \\ 6300 \\ 210 \\ 28 \\ \hline 328538 \end{array}$$

Il est à peine besoin d'ajouter qu'on adopte la seconde forme et que, par suite, on commence toujours l'opération par la droite.

Cas particulier. — *Multiplication d'un nombre quelconque par un nombre d'un seul chiffre suivi de zéros en nombre quelconque.*

Soit par exemple à multiplier 63 par 6000. Il est évident que, pour répéter 6000 fois un groupe d'objets, on peut le répéter d'abord 6 fois, puis le groupe nouveau 1000 fois, ce qui fait 1000 ensembles de 6 groupes chacun, c'est-à-dire 6000 groupes en tout ; ou bien on peut répéter d'abord 1000 fois le groupe considéré, puis 6 fois cet ensemble, ce qui fait 6 ensembles de 1000 groupes chacun ou 6000 groupes.

Dans le premier cas, on a

$$63 \times 6 = 378 \; ; \qquad 378 \times 1000 = 378000.$$

Dans le second cas, on a

$$63 \times 1000 = 63000 \; ; \qquad 63000 \times 6 = 378000.$$

De là, la règle :

On multiplie d'abord le nombre donné par le chiffre non nul du multiplicateur, et on ajoute autant de zéros à la droite du produit qu'il y en a au multiplicateur ; ou on ajoute autant de zéros au multiplicande qu'il y en a au multiplicateur, puis on multiplie ce résultat par le chiffre non nul du multiplicateur.

36. Multiplication d'un nombre quelconque par un nombre quelconque. — Soient A le multiplicande et B le multiplicateur ; supposons que B soit la somme de plusieurs nombres entiers, B_1, B_2, ..., B_k. Pour placer dans un tableau B fois le nombre A, on peut d'abord l'y placer B_1 fois, puis B_2 fois, etc., jusqu'à B_k fois. Donc *on multipliera le nombre* A *par* B, *en le multipliant d'abord par* B_1, *puis par* B_2, B_3, ..., B_k, *et ajoutant ensuite tous les résultats obtenus.* Ainsi le produit

$$A \times B, \quad \text{ou} \quad A \times (B_1 + B_2 + \ldots\ldots + B_k) \; (*)$$

est égal à

$$A \times B_1 + A \times B_2 + \ldots\ldots + A \times B_k.$$

(*) $(B_1 + B_2 + \ldots\ldots + B_k)$ désigne, comme dans tous les cas analogues, la somme effectuée, c'est-à-dire le nombre B.

Si l'on écrit, pour abréger, comme cela se fait communément, AB au lieu de $A \times B$ et $A(B_1 + B_2 + \ldots\ldots + B_k)$ au lieu de $A \times (B_1 + B_2 + \ldots\ldots + B_k)$, on a

$$AB = A(B_1 + B_2 + \ldots\ldots + B_k) = AB_1 + AB_2 + \ldots\ldots + AB_k.$$

Alors, *pour multiplier un nombre quelconque* A *par un nombre quelconque* B, *on multiplie* A *par les unités de* B, *puis par le nombre que représentent les dizaines de* B, *par le nombre que représentent les centaines de* B, *etc.; ensuite on fait la somme de tous les produits partiels obtenus.*

Exemple : 57324×236 donne l'opération :

$$\begin{array}{r} 57324 \\ 236 \\ \hline 333944 \\ 1719720 \\ 11464800 \\ \hline 13518464 \end{array} ;$$

les nombres écrits entre les deux barres horizontales sont les divers produits partiels qu'il faut ajouter.

Dans la pratique, on ne met pas les zéros à droite des produits partiels ; on se contente de reculer le second produit d'un rang vers la gauche, le troisième de deux rangs, etc. Ex :

$$\begin{array}{r} 57324 \\ 236 \\ \hline 333944 \\ 171972 \\ 114648 \\ \hline 13518464 \end{array}$$

Si un, deux ou trois zéros se rencontrent de suite dans le multiplicateur, les produits partiels correspondants sont nuls, et le produit que l'on rencontre après doit être reculé de 2, 3, 4, ... rangs vers la gauche. Ex. :

```
     57324
      4006
  ---------
    333944
229296
---------
229629944
```

Remarque I. — Lorsque le multiplicande et le multiplicateur sont terminés par des zéros, on fait la multiplication comme si les zéros n'existaient pas, et on ajoute, à la fin, à la droite du produit autant de zéros qu'il y en a dans les deux nombres pris ensemble. Soit, par exemple, à multiplier 36000 par 2750 ; il est clair que pour écrire le nombre 36000, 2750 fois, il suffit de l'écrire d'abord 275 fois et de répéter cet ensemble 10 fois ; on peut donc négliger d'abord le zéro qui est à la droite de 275 pour l'ajouter ensuite ; de même, pour répéter 275 fois un groupe de 36000 objets, il suffit de répéter 275 fois un groupe contenant 36 groupes partiels de 1000 objets chacun ; on pourra donc multiplier d'abord 36 par 275, puis le résultat par 1000, c'est-à-dire ajouter 3 zéros à la droite de ce produit.

En définitive, on multipliera 36 par 275 et on ajoutera ensuite 4 zéros à la droite du produit ainsi obtenu. Dans chaque cas particulier, on raisonne de la même manière.

Remarque II. — Dans la multiplication d'un nombre quelconque par un nombre de plusieurs chiffres, rien n'empêche de parcourir le multiplicateur de gauche à droite, plutôt que de droite à gauche ; il suffit alors de tenir compte de la nature des unités que représente chaque produit partiel, et par conséquent de les avancer, à chaque fois, d'un rang vers la droite ; s'il y a des zéros au multiplicateur, les produits correspondants manquent, et le premier produit partiel que l'on a à écrire doit être avancé d'autant de rangs vers la droite qu'il y a de zéros, plus un.

Le multiplicande doit, comme nous l'avons dit, être par-

couru de droite à gauche, sous peine de compliquer beaucoup l'opération, à cause des retenues que l'on peut avoir à faire. Exemple :

```
  57324
    236
 ------
 114648
 171972
  333944
 -------
13518464
```

37. **Nombre des chiffres du produit.** — Si on augmente ou si on diminue les diverses parties d'une somme, la somme est évidemment augmentée ou diminuée, suivant le cas ; car chacun des groupes représentés par les divers nombres ajoutés, contient plus ou moins d'unités, et, par suite, il en est de même du groupe final, qui est formé par leur réunion. Il résulte de là, dans le cas où tous les nombres ajoutés sont égaux, que *si, dans une multiplication, on augmente ou diminue le multiplicande, sans toucher au multiplicateur, on augmente ou diminue le produit.*

Si, de même, on augmente ou diminue le multiplicateur, sans toucher au multiplicande, le produit augmente ou diminue.

Car alors le nombre des groupes d'objets que l'on prend est augmenté ou diminué, et, par conséquent, le groupe final, qui provient de leur réunion, subit la même variation (*).

Si on augmente ou si on diminue à la fois le multiplicande et le multiplicateur, le produit est augmenté ou diminué.

Car on peut d'abord faire subir la variation au multiplicande seul, puis au multiplicateur seul, et chacune d'elles fait subir au produit une variation dans le même sens, d'après ce qui vient d'être dit.

(*) Dans toutes les questions de ce genre, il faut toujours revenir à la définition du nombre entier, qui indique combien il y a d'objets dans un groupe, et revenir à l'idée d'addition, telle qu'elle a été exposée au début.

Considérons, alors, pour fixer les idées, le produit d'un nombre A de 5 chiffres par un nombre B de 3 chiffres. Nous aurons les inégalités suivantes :

$$10000 \leqslant A < 100000 \text{ ; } (*)$$
$$100 \leqslant B < 1000 \text{ ;}$$

en multipliant les inégalités membre à membre, elles seront conservées, d'après les propriétés que nous venons d'exposer, et nous aurons

$$1000000 \leqslant AB < 100000000.$$

Il résulte de là que AB contient au moins 7 chiffres et au plus 8 ; si donc on généralise le résultat que l'on vient d'obtenir, on peut dire que *le produit de deux nombres contient autant de chiffres qu'il y en a dans les deux nombres réunis, ou un de moins.*

Exemples : le produit

$$57324 \times 236 = 13518464$$

contient 8 chiffres, autant qu'il y en a dans les deux nombres ensemble; tandis que le produit

$$17428 \times 236 = 4113008$$

contient un chiffre de moins.

38. **Propriétés de la multiplication.** — La multiplication est une opération *commutative.*

Le multiplicande et le multiplicateur d'un produit s'appellent les *facteurs* de ce produit.

On peut définir aisément les produits de plus de deux facteurs. On adopte la définition suivante : *un produit de plusieurs facteurs s'obtient en multipliant le premier par le second, puis le résultat par le troisième, puis le nouveau résultat par le quatrième, etc.*

(*) Le signe $\leqslant$ se lit *inférieur ou égal à ;* il indique ici que A est ordinairement plus grand que 10000, mais qu'il peut accidentellement être égal à 10000.

Ainsi, par définition, le produit

$$2.4.3.7.8 \qquad \text{ou} \qquad 2 \times 4 \times 3 \times 7 \times 8$$

s'obtient en multipliant 2 par 4, puis le résultat, 8, par 3, puis le résultat, 24, par 7, puis le résultat, 168, par 8, ce qui donne 1344 pour valeur du produit.

1° *On n'altère pas un produit de deux facteurs, en échangeant entre eux les deux facteurs.*

Soient A et B les deux facteurs ; il s'agit de montrer que A.B = B.A. Pour cela, écrivons sur une ligne horizontale A fois l'unité, le nombre 1 ; puis répétons B fois cette ligne :

$$\text{B lignes}\left\{\begin{array}{l} \overbrace{1,\ 1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1}^{\text{A unités}} \\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1. \end{array}\right.$$

Par définition de la multiplication, il y aura A.B unités dans ce tableau. Or, il y a A colonnes qui contiennent chacune B unités ; il y a donc B.A unités dans le même tableau. Donc

$$A.B = B.A.$$

2° *On n'altère pas un produit de trois facteurs, en échangeant entre eux les deux derniers.*

Soient A, B, C les trois facteurs ; il s'agit de montrer que A.B.C = A.C.B.

Pour cela, écrivons B fois le nombre A sur une ligne horizontale, et répétons C fois cette ligne

$$\text{C lignes}\left\{\begin{array}{l} \overbrace{A,\ A,\ A,\ \ldots\ldots,\ A}^{\text{B nombres A}} \\ A,\ A,\ A,\ \ldots\ldots,\ A \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A,\ A,\ A,\ \ldots\ldots,\ A; \end{array}\right.$$

chaque ligne, contenant B fois le nombre A, contient A.B unités, et comme il y a C lignes, le tableau contient A.B.C unités, par définition du produit A.B.C ; de même chaque colonne contient C fois le nombre A, c'est-à-dire A.C unités, et, comme il y a B colonnes, le tableau contient A.C.B unités. On a donc bien

$$A.B.C = A.C.B.$$

3° *On n'altère pas un produit de plusieurs facteurs, en échangeant entre eux deux facteurs consécutifs.*

Soient A, B, C, D, E, F, G, H des facteurs en nombre quelconque, huit par exemple. Si nous échangeons les deux facteurs D et E le produit ne change pas, et l'on a

$$ABCDEFGH = ABCEDFGH.$$

En effet, si nous montrons que

$$ABCDE = ABCED,$$

la propriété sera établie, car pour avoir les deux produits nous aurons alors à faire les mêmes opérations sur le même nombre, multiplier les deux membres de l'égalité successivement par F, G, H, ce qui conduira au même résultat.

Désignons par P le produit ABC effectué; nous avons vu antérieurement que

$$PDE = PED;$$

et si nous remplaçons P par les trois facteurs A, B, C, ce qui est permis, d'après la définition d'un produit de plusieurs facteurs, nous obtenons l'égalité qu'il fallait établir.

4° *Dans un produit de plusieurs facteurs, on peut écrire les divers facteurs dans un ordre quelconque, sans altérer le résultat.*

En effet, on peut amener au premier rang celui des facteurs que l'on a choisi, en l'échangeant successivement avec ceux qui sont avant lui; cela fait, on amènera de même au second rang tel facteur que l'on voudra; puis, au troisième rang, n'importe quel autre facteur; etc.

On résume tout ce qui précède en disant simplement que dans un produit de facteurs on peut intervertir l'ordre des facteurs.

Cette propriété de la multiplication s'exprime en disant que cette opération est *commutative.*

Remarque. — Lorsqu'on veut effectuer une multiplication, on peut prendre pour multiplicateur n'importe lequel des deux facteurs ; on choisit généralement celui qui a le moins de chiffres non nuls (autres que des zéros).

On peut aussi se servir de cette propriété pour faire la preuve d'une multiplication : il suffit d'échanger le multiplicande et le multiplicateur et de recommencer l'opération ; si l'on retrouve le même résultat, il y a une forte présomption pour que l'opération soit juste.

39. **Autres propriétés de la multiplication.** — La multiplication est une opération *distributive par rapport à l'addition*, c'est-à-dire que *pour multiplier une somme par un nombre quelconque, on peut multiplier chacune des parties de la somme par ce nombre et ajouter les résultats.*

Ainsi

$$(B_1 + B_2 + \ldots + B_n)A = B_1A + B_2A + \ldots + B_nA.$$

Cette propriété a déjà été établie au n° 35 ; mais on peut l'expliquer en deux mots en remarquant que si l'on répète A fois un ensemble de groupes d'objets, chaque groupe se trouve répété A fois.

D'ailleurs la première propriété de la multiplication nous permet d'écrire

$$(B_1 + B_2 + \ldots + B_n)A = A(B_1 + B_2 + \ldots + B_n),$$

et $\quad B_1A = AB_1, \qquad B_2A = AB_2, \qquad B_nA = AB_n ;$

donc on a aussi

$$A(B + B_2 + \ldots + B_n) = AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n.$$

C'est du reste de cette propriété que nous avons déduit la manière d'effectuer l'opération, dans le cas général.

Pour multiplier deux sommes l'une par l'autre, on peut multiplier chaque partie de l'une par chaque partie de l'autre et ajouter les résultats.

En effet, soit $S = A + B + C + D$ une somme de 4 parties par exemple, et soit $S' = A' + B' + C'$ une somme de 3 nombres. Nous pouvons écrire

$$SS' = (A + B + C + D)S',$$

et, d'après la propriété précédente, le second membre est égal à

$$AS' + BS' + CS' + DS';$$

or
$$\begin{aligned} AS' &= A(A' + B' + C') = AA' + AB' + AC', \\ BS' &= B(A' + B' + C') = BA' + BB' + BC', \\ CS' &= C(A' + B' + C') = CA' + CB' + CC', \\ DS' &= D(A' + B' + C') = DA' + DB' + DC'. \end{aligned}$$

Le produit SS' s'obtient en faisant la somme de toutes ces égalités, et on a

$$(A+B+C+D)(A'+B'+C') = \begin{cases} AA'+AB'+AC'+BA'+BB'+BC' \\ +CA'+CB'+CC'+DA'+DB'+DC'. \end{cases}$$

C'est justement ce qu'il fallait établir. La démonstration est la même dans tous les cas.

La multiplication est une opération *associative*, c'est-à-dire que *dans un produit de facteurs on peut remplacer plusieurs d'entre eux par leur produit effectué.*

En effet, soit ABCDEFGH un produit de 8 facteurs, par exemple ; désignons le produit effectué de C, E, H, par P ; nous allons montrer qu'on peut remplacer les trois facteurs C, E et H par P. Pour cela, il suffit de rappeler que l'on peut toujours amener ces trois facteurs aux premiers rangs, et ainsi

$$ABCDEFGH = CEH.ABDFG.$$

Or, pour obtenir le second produit, on commence d'abord

par effectuer le produit CEH, c'est-à-dire que l'on remplace CEH par P. Donc, etc.

Pour multiplier la différence de deux nombres par un troisième, on peut multiplier les deux nombres par ce troisième et retrancher les résultats.

Soit, en effet, $B = B_1 - B_2$; cette égalité est équivalente à $B_1 = B + B_2$, et l'on a, d'après ce qui précède, $B_1A = BA + B_2A$; on voit donc que $BA = B_1A - B_2A$, c'est-à-dire

$$(B_1 - B_2)A = B_1A - B_2A,$$

ce qu'il fallait démontrer.

On ne change pas le sens d'une inégalité, en multipliant les deux membres par un même nombre. (Il s'agit, bien entendu, ici, de nombres entiers ordinaires.)

Soit $B_1 > B_2$; cela revient à écrire $B_1 = B_2 + B$. Multiplions les deux membres de cette égalité par A; nous aurons

$$AB_1 = AB_2 + AB;$$

donc AB_1 est plus grand que AB_2 et l'inégalité $B_1 > B_2$ entraîne

$$AB_1 > AB_2.$$

La réciproque est facile à établir.

Enfin la multiplication jouit des deux propriétés marquées par les égalités $A \times 1 = A$, $A \times 0 = 0$.

Telles sont les propriétés fondamentales de la multiplication des nombres entiers.

40. Quelques propositions relatives aux produits de facteurs (*).

1° *Pour multiplier un nombre par un produit de plusieurs facteurs, il suffit de le multiplier successivement par chacun des facteurs du produit.*

* On désigne sous le nom de *proposition* une vérité dont l'énoncé est à la fois concis et complet, et qu'il faut établir en s'appuyant sur d'autres vérités déjà démontrées. On emploie souvent le nom de *théorème* à la place de celui de proposition.

Cette proposition est identique au fond à celle que nous avons déjà démontrée pour établir que la multiplication est associative ; la démonstration que nous allons en donner est du reste calquée sur celle-là.

Soient $P = ABC$ un produit de facteurs, et N un nombre quelconque; on a $NP = PN$. Or, la définition d'un produit de plusieurs facteurs nous montre que $ABCN = PN$, puisque, pour évaluer ce produit, on multiplie d'abord A par B, puis le résultat par C, puis enfin ce nouveau résultat par N. On a donc

$$NP = PN = ABCN$$

et $$ABCN = NABC;$$

donc $$NP = NABC.$$

La proposition est donc établie.

Exemple : $8 \times 125 = 8 \times 5 \times 5 \times 5 = 1000.$

2° *Pour multiplier un produit de facteurs par un nombre quelconque, il suffit de multiplier l'un des facteurs par ce nombre.*

Soit le produit ABC à multiplier par N; si nous désignons par P le produit ABC, nous aurons

$$PN = ABCN = BNAC;$$

nous pouvons maintenant remplacer BN par le produit effectué, Q, et nous aurons

$$ABCN = QAC = AQC;$$

or, Q est égal au produit de B par N, donc la proposition est établie; car il est visible qu'on procéderait de même, dans un cas quelconque, pour un facteur choisi arbitrairement.

Exemple : $8 \times 25 \times 12$ à multiplier par 4; on a $8 \times 25 \times 12 \times 4 = 8 \times (25 \times 4) \times 12$, ce qui est égal à $8 \times 100 \times 12$ ou à 9600.

41. Exposants. — Lorque, dans un produit de facteurs,

tous les facteurs sont égaux, il est clair qu'on peut représenter ce produit par un symbole indiquant, d'une part, le facteur employé, d'autre part, le nombre de fois qu'il est employé. Un pareil produit se nomme une *puissance* du facteur considéré; ainsi 4.4 est le *carré* de 4 ou la *deuxième puissance*, 4.4.4 est le *cube* ou la *troisième puissance* de 4; 4.4.4.4 est la *quatrième puissance* de 4, etc.

L'*exposant* est un nombre égal au nombre des facteurs d'une puissance; il s'écrit en haut du facteur qui figure dans la puissance, et à droite. Ainsi A^3 est le produit de trois facteurs égaux à A; il se lit A *au cube* ou A *trois*; A^n est le produit de n facteurs égaux à A et se lit A *puissance* n ou A, n.

42. Règles de calcul simples relatives aux exposants.

1° *Le produit de deux puissances d'un même nombre est une autre puissance de ce nombre, ayant pour exposant la somme des exposants des deux facteurs.*

Ainsi $A^m.A^n = A^{m+n}$.

En effet, A^m est le produit de m facteurs égaux à A, A^n est le produit de n facteurs égaux à A; il y a donc, dans le produit total, $m+n$ facteurs égaux à A. Donc, d'après la définition de l'exposant, ce produit se représente par A^{m+n}.

On peut étendre cette règle au produit d'un nombre quelconque de puissances d'un même nombre A, et montrer que *le produit est une autre puissance de* A *ayant pour exposant la somme des exposants des facteurs.*

En effet, soit à multiplier A^m par A^n, puis le résultat par A^p, puis le nouveau résultat par A^q, etc.; d'après la règle précédente, le produit de A^m par A^n est A^{m+n}; en multipliant ce résultat par A^p, on trouve de même A^{m+n+p}; en multipliant ce nouveau produit par A^q, on trouve de même $A^{m+n+p+q}$; etc. On a donc bien

$$A^m.A^n.A^p.A^q.... = A^{m+n+p+q+.....}$$

Exemples : $3^4.3^7 = 3^{11}$;

$3^2.3^4.3^5.3^7 = 3^{18}$.

2° *Pour élever une puissance d'un nombre à une nouvelle puissance, on multiplie l'ancien exposant par le nouveau.*

Ainsi $(A^m)^n = A^{mn}$.

Pour démontrer cette proposition, nous remarquerons que $(A^m)^n$ est le produit de n facteurs égaux à A^m. Or, d'après la propriété précédente, on obtient le produit de toutes ces puissances de A en faisant la somme de tous les exposants de A, c'est-à-dire en répétant m, n fois ; ce qui démontre la proposition énoncée.

On a aussi $(A^n)^m = A^{nm}$;

d'où $(A^m)^n = (A^n)^m$.

On voit donc que pour élever un nombre à deux puissances successives, on peut commencer par celle que l'on veut.

3° *Pour élever un produit de facteurs à une puissance quelconque, on élève chacun d'eux à cette puissance.*

Ainsi $(ABC)^n = A^nB^nC^n$.

Pour établir cette proposition, il suffit de remarquer que $(ABC)^n$ est le produit de n facteurs égaux à ABC,

$$(ABC)^n = ABC.ABC....ABC \quad (n \text{ fois}) ;$$

nous pouvons maintenant, dans le second membre, écrire tous les facteurs A à la suite l'un de l'autre, ce qui donnera A^n, puis tous les facteurs B à la suite l'un de l'autre, ce qui donnera B^n, etc.

* 43. **Produit de deux nombres entiers positifs ou négatifs.** — 1° Nous allons définir d'abord le produit d'un nombre négatif par un nombre positif.

A cet effet, rappelons que, dans le cas où les nombres A et B sont positifs et où A est plus grand que B, l'égalité conditionnelle $B + C = A$, définit un nombre positif C qui est égal à la différence entre A et B : $C = A - B$.

Si, dans ce cas, nous multiplions A et B par un nombre positif D, l'égalité $BD + C_1 = AD$ définit un nouveau nombre positif C_1, car $AD > BD$; nous allons montrer que ce nombre

C_1 est égal au produit de C par D. En effet, si nous mettons dans un tableau les unités de A, puis dans un autre tableau les unités de B, et que nous barrions dans le tableau A autant d'unités qu'il y en a dans le tableau B, et aussi les unités du tableau B, le nombre C est égal au nombre des unités non barrées du tableau A ; répétons maintenant, tels qu'ils sont actuellement, les tableaux A et B chacun D fois ; les nouveaux tableaux contiendront autant d'unités barrées l'un que l'autre, puisque cela avait lieu primitivement ; donc les unités non barrées du nouveau tableau A donnent le nombre $AD - BD$; mais, d'autre part, le nouveau tableau A contient D fois autant d'unités non barrées que l'ancien ; donc, ce nombre est égal au produit de C par D, et $C_1 = CD$.

Nous voyons en passant que si A et B sont positifs et $A > B$, on a l'égalité suivante, déjà établie autrement :

$$(A - B)D = AD - BD,$$

en supposant D positif.

Supposons maintenant A et B positifs, mais $A < B$; l'égalité conditionnelle $B + C = A$ définit alors un nombre C, négatif, et que nous avons représenté par $-(B - A)$. Si nous multiplions A et B par un nombre positif D, la nouvelle égalité $BD + C_1 = AD$ définira un nombre négatif, C_1, car $BD > AD$, et nous dirons que le nombre C_1 est le produit de C par D. Cette définition est naturelle, d'après ce qui précède.

Mettons maintenant les unités de A dans un tableau positif, A, celles de B dans un tableau négatif, B, et barrons autant d'unités dans un tableau que dans l'autre, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'unités non barrées dans A ; le nombre négatif formé avec les unités non barrées du tableau négatif B est le nombre C. Répétons D fois ces deux tableaux ; ils contiendront encore autant d'unités barrées l'un que l'autre et il n'y aura aucune unité non barrée dans le tableau positif ; donc celles qui resteront dans le nouveau tableau négatif donneront le nombre négatif $AD - BD$; mais il y en a D fois autant que dans l'ancien tableau négatif B ; donc le nouveau nombre négatif C_1 contient D fois autant d'unités que C, abstraction faite des deux signes —.

On déduit de là la règle suivante :

Pour former le produit d'un nombre négatif par un nombre positif, on fait le produit des valeurs absolues et on donne au résultat le signe —.

2° Afin de conserver à la multiplication la propriété qu'elle a d'être commutative, nous prendrons toujours $CD = DC$, même dans le cas où l'un des nombres est positif et l'autre négatif, et nous définirons ainsi le produit d'un nombre positif D par un nombre négatif C. Ce produit est donc donné par la même règle que la précédente.

3° Il nous reste maintenant à dire ce qu'on entend par le produit de deux nombres négatifs.

Supposons, comme précédemment, A et B positifs et $A < B$; l'égalité $B + C = A$ définit un nombre négatif C ; multiplions B et A par un nombre négatif D ; nous dirons encore que l'égalité $BD + C_1 = AD$ définit un nombre C_1 qui est le *produit* de C par D. Or $C_1 = AD - BD$, et cette soustraction de deux nombres négatifs a été étudiée ; nous avons vu que $C_1 = |BD| - |AD|$; comme $B > A$, nous sommes ramenés à une soustraction ordinaire et nous voyons que le nombre C_1 est positif et égal au produit de $B - A$ par la valeur absolue de D. Donc nous arrivons à la règle suivante :

Pour faire le produit de deux nombres négatifs, on fait le produit de leurs valeurs absolues et on donne au résultat le signe +.

Les tableaux suivants contiennent ce qu'on appelle communément les règles des signes :

$$\begin{array}{rl} 7 \times 3 = 21 & (+) \times (+) = + \\ -7 \times 3 = -21 & (-) \times (+) = - \\ 7 \times (-3) = -21 & (+) \times (-) = - \\ (-7) \times (-3) = 21 & (-) \times (-) = +. \end{array}$$

* 44. **Multiplication d'une somme algébrique par un nombre entier positif.** — Soit la somme algébrique

$$S = A + B + C + \ldots + K + L,$$

A, B, C, ... K, L étant des nombres entiers positifs ou négatifs. Pour avoir S, nous mettrons les unités des nombres positifs dans un premier tableau, de façon que les groupes correspondant à ces nombres y restent séparés ; de même, nous mettrons les unités des nombres négatifs dans un deuxième tableau, de façon que les groupes correspondant à ces divers nombres y restent séparés. Nous barrerons autant d'unités dans l'un des tableaux que dans l'autre, jusqu'à ce que l'un d'eux ne contienne plus d'unités ; le nombre restant dans le tableau où il y a des unités non barrées, pris avec le signe du tableau lui-même, est le nombre S.

Maintenant, pour multiplier S par un nombre positif P, il suffit de répéter P fois les unités de S, et de donner au résultat le signe de S ; mais ceci se fait évidemment en répétant P fois chacun des deux tableaux, avec les unités barrées ou non barrées qu'ils renferment ; et, comme les nombres qui forment S y sont isolés, chacun des nombres de S est répété P fois, et le produit définitif est la somme algébrique de tous ces produits partiels. Nous arrivons donc à la règle suivante :

Pour multiplier une somme algébrique par un nombre positif, on multiplie chacune des parties de cette somme par le nombre

employé, et on forme une nouvelle somme algébrique avec tous ces résultats.

* 45. **Multiplication d'une somme algébrique par un nombre entier négatif.** — Soit, comme précédemment,

$$S = A + B + C + \ldots + K + L$$

une somme de nombres entiers positifs ou négatifs ; nous avons vu au n° 43 que le produit de S par un nombre négatif est de signe contraire à S ; soit donc $P = -Q$ un nombre négatif quelconque, le produit SP sera égal à $-SQ$. Il résulte de là que pour avoir ce produit il faudra répéter Q fois chacun des tableaux qui ont servi à calculer S, en ayant soin d'échanger entre eux les signes afférents à ces tableaux ; il est clair, en effet, que le nombre des unités non barrées dans celui des tableaux qui en contient le plus, n'est pas altéré par ce changement, le signe seul du nombre ainsi représenté est changé ; et, comme en ne changeant pas les signes des tableaux, on eût obtenu ainsi le produit SQ, on obtient alors le produit $-SQ$. Mais, les nombres de S qui se trouvent isolés dans les deux tableaux primitifs, sont répétés chacun Q fois par ce procédé, et les signes qui leur sont adjoints sont changés ; donc dans les derniers tableaux figurent les produits de ces nombres par P ou $-Q$. De là, la règle qui suit, et dans laquelle on a compris la précédente :

Pour multiplier une somme algébrique par un nombre quelconque, positif ou négatif, on multiplie chacune des parties de la somme par ce nombre, et on forme avec les résultats une nouvelle somme algébrique. Ainsi

$$(A + B + C + \ldots + L)P = AP + BP + CP + \ldots + LP,$$

que le nombre P soit positif ou négatif. On dit que le premier membre se déduit du second, en mettant P en facteur.

* 46. **Multiplication de deux sommes algébriques.** — Dorénavant, nous appellerons *terme* d'une somme algébrique l'une quelconque de ses parties.

Soient alors

$$S = A + B + C + \ldots + L,$$
$$S' = A' + B' + C' + \ldots + L',$$

deux sommes algébriques à multiplier l'une par l'autre ; d'après les nos 44 et 45, on a

$$SS' = (A + B + C + \ldots + L)S' = AS' + BS' + \ldots + LS' ;$$

on a, de même,

$$AS' = S'A = (A' + B' + C' + \ldots + L')A = A'A + B'A + C'A + \ldots + L'A,$$
$$BS' = S'B = (A' + B' + C' + \ldots + L')B = A'B + B'B + C'B + \ldots + L'B,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$LS' = S'L = (A' + B' + C' + \ldots + L')L = A'L + B'L + C'L + \ldots L'L.$$

Si on ajoute tous ces produits, on obtient, d'une part, le produit SS', d'autre part, une somme algébrique qui contient le produit de chacun des termes de S' par chacun des termes de S. On peut donc énoncer la règle suivante :

Pour multiplier entre elles deux sommes algébriques, on fait le produit de chacun des termes de l'une d'elles successivement par tous les termes de l'autre, de façon que chacun de ces produits partiels soit pris une fois et une seule, et on forme une nouvelle somme algébrique avec tous ces résultats.

Si l'une des sommes contient m termes et l'autre n, le produit contient mn termes.

Les résultats des deux numéros précédents peuvent s'exprimer en disant que la multiplication plus générale dont nous nous occupons ici est distributive par rapport à l'addition des nombres entiers, positifs ou négatifs.

Le théorème que nous venons d'établir peut être généralisé et étendu au produit d'un nombre quelconque de sommes algébriques. Cela sera fait plus tard ; et nous reporterons aussi, après la théorie des nombres fractionnaires, ce que nous aurions à dire dès maintenant des inégalités : nous éviterons ainsi de trop nous répéter sur le même sujet.

CHAPITRE V

DIVISION

47. Préliminaires, définition. — On appelle *multiples* d'un nombre les produits de ce nombre par tous les nombres entiers.

Les multiples de 3 forment la suite infinie

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

tous les nombres ne figurent pas dans cette suite ; par conséquent un nombre quelconque n'est pas un multiple de 3.

D'une manière générale, les multiples d'un nombre A sont des nombres déterminés,

$$A, 2A, 3A, 4A, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et un nombre quelconque n'est pas multiple de A.

Si l'on suppose qu'un nombre B soit un multiple de A, B devra être le produit de A par un nombre entier C. *La division de* B *par* A a pour but de chercher le nombre C, s'il existe.

La division a pour but, étant donnés deux nombres A *et* B, *de chercher par quel nombre* C *il faut multiplier* A *pour avoir* B*;* ou bien :

La division a pour but. étant donnés deux nombres A *et* B, *de chercher combien de fois* A *est contenu dans* B.

Ces deux définitions sont évidemment équivalentes.

Nous voyons en outre que la division est l'opération inverse de la multiplication.

Il suffit de se reporter à ce qui précède, pour voir qu'en général, cette opération est impossible. Si elle est possible, on aura $B = AC$, C étant le nombre inconnu.

Le nombre B s'appelle *dividende* ; A est le *diviseur* et C le *quotient*.

La division de B par A se désigne en écrivant B au-dessus de A et en les séparant par un trait ; on écrit $\frac{B}{A} = C$, et on lit B *sur* A *égale* C ou B *divisé par* A *égale* C.

Exemples : $\frac{54}{9} = 6$, $\frac{27}{3} = 9$.

Dans le premier cas, 54 est le dividende, 9 le diviseur, 6 le quotient ; dans le second, 27 est le dividende, 3 le diviseur et 9 le quotient.

48. **Manières évidentes d'effectuer l'opération.** — Soit à diviser B par A ; si l'on connaît un assez grand nombre des multiples de A,

A, 2A, 3A, 4A, ...,

il n'y aura qu'à chercher parmi ceux-ci le nombre B ; si B est dans cette suite, l'opération est possible et le rang du nombre B est le quotient ; si B n'est pas dans cette suite, l'opération est impossible.

Exemples : Soit à diviser 216 par 36. Formons la suite des multiples de 36,

36, 72, 108, 144, 180, 216, ... ;

nous verrons immédiatement que 216 est dans cette suite ; nous en concluons que l'opération est possible, et que le quotient est 6, car 216 étant au sixième rang, on a $216 = 36 \times 6$.

Soit à diviser 221 par 36 ; la suite des multiples de 36 est

36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, ... ;

le nombre 221 n'est pas dans cette suite ; donc l'opération est impossible.

On peut procéder autrement et retrancher de 216 le nombre 36 autant de fois qu'on le pourra ; nous dirons alors :

36 de 216, reste 180 ; 36 de 180, reste 144 ; 36 de 144, reste 108 ; 36 de 108, reste 72 ; 36 de 72, reste 36 ; 36 de 36, reste 0. Le nombre 36 est donc contenu exactement 6 fois dans 216 ; par conséquent l'opération est possible et le quotient est 6.

Dans le cas général, on retranchera A de B autant de fois qu'on le pourra, successivement. Si on trouve 0 pour dernier reste, l'opération est possible, et le quotient est égal au nombre des soustractions effectuées ; si le dernier reste, inférieur à A, n'est pas nul, l'opération est impossible, A n'est pas contenu un nombre exact de fois dans B.

C'est dans ce sens que l'on dit parfois que la division est une soustraction abrégée.

49. **Division avec reste.** — Lorsque B n'est pas un multiple de A, il est forcément compris entre deux multiples consécutifs de A ; ainsi 221 est compris entre deux multiples consécutifs de 36, 216 et 252, ou 36×6 et 36×7. On peut définir alors une opération très voisine de la précédente et que l'on appellera encore *division*. On dira que dans ce cas *la division a pour but de chercher le plus grand multiple du diviseur qui est contenu dans le dividende*, ou, plus exactement, le quotient de ce plus grand multiple par le diviseur ; ce qui reste du dividende, une fois ce multiple enlevé, s'appelle le *reste* de l'opération ; le reste est toujours plus petit que le diviseur. Autrement :

La division de B *par* A *a pour but de décomposer* B *en deux parties, l'une, le produit de* A *par un nombre entier* Q, *l'autre, un nombre entier* R, *moindre que le diviseur.*

Les nombres entiers, B, A, Q, R, s'appellent ***dividende***, *diviseur*, *quotient* et *reste*.

C'est donc dans l'égalité

$$B = AQ + R,$$

et dans l'obligation pour R d'être plus petit que A, que

consiste essentiellement la définition de la division de B par A.

Le nombre Q s'appelle aussi le quotient à une unité près de B par A ; il satisfait aux inégalités

$$AQ \leqslant B < A(Q+1),$$

qui ont servi à définir l'opération et qui, du reste, se déduisent immédiatement de l'égalité précédente.

Si $R = 0$, on dit que la division se fait exactement, et on retombe sur l'opération définie antérieurement.

Exemple : On a

$$216 < 221 < 252$$

ou

$$36 \times 6 < 221 < 36 \times 7 ;$$

6 est donc le quotient à une unité près de 221 par 36. En outre

$$221 = 36 \times 6 + 5 ;$$

5 est le reste de cette division.

Il résulte de la définition précédente que, si l'on considère toutes les divisions possibles par A, elles ne donneront comme restes que les nombres

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, A-1.$$

Tous les nombres qui donnent pour reste 0 sont compris dans la forme kA, k étant un nombre entier quelconque ; ceux qui donnent pour reste 1, sont compris dans la forme $1 + kA$; ceux qui donnent pour reste 2, sont compris dans la forme $2 + kA$; etc.

Donc tous les nombres entiers sont sûrement compris dans les formes

$$kA, \quad 1 + kA, \quad 2 + kA, \quad \ldots\ldots, \quad A - 1 + kA.$$

k prenant successivement toutes les valeurs entières,

$$0, 1, 2, \ldots\ldots, n, \ldots\ldots$$

De plus, tous ces nombres sont évidemment distincts ·

par conséquent les formes signalées donnent tous les nombres entiers, chacun une seule fois.

Les nombres 0, 1, 2, 3, ..., A — 1 s'appellent *restes relatifs au diviseur* A ou *au module* A.

Pour qu'il y ait lieu de faire la division de B par A, il faut que B soit plus grand que A. Si $B < A$, le quotient est 0 et le reste est B, car on a

$$B = 0A + B \qquad (B < A).$$

Lorsque B est plus grand que A, il est facile de savoir combien il y a de chiffres au quotient : il suffit de comparer B aux nombres

$$A,\ 10A,\ 100A,\ 1000A,\ \ldots.,$$

obtenus en multipliant A par 1, 10, 100, 1000, ..., et si B est compris, par exemple, entre 100 A et 1000 A, on en conclut que le quotient est au moins égal à 100 et inférieur à 1000 ; par conséquent, dans ce cas, le quotient aura trois chiffres.

Exemples : Le quotient de 75 par 214 est 0 et le reste 75. Le quotient de 438725 par 714 a trois chiffres, car le dividende est compris entre 100 fois le diviseur et 1000 fois ce nombre,

$$71400 < 438725 < 714000.$$

50. 1er Cas. — *Le diviseur et le quotient ont chacun un seul chiffre.*

Il suffit alors de connaître la table de multiplication pour avoir le quotient et le reste ; car on découvrira de suite quel est le plus grand multiple du diviseur contenu dans le dividende.

Exemples : Soit à diviser 56 par 8 ; on a $8 < 56 < 80$; donc le quotient est inférieur à 10 et nous sommes dans le cas signalé. Nous savons, d'ailleurs, que 7 fois 8 font 56 ; par conséquent le quotient est 7 et la division se fait exactement.

Soit à diviser 61 par 8 ; on a

$$8 < 61 < 80 ;$$

le quotient est donc inférieur à 10 et nous sommes encore dans le cas signalé. Nous voyons de suite que 7 fois 8 ou 56 est le plus grand multiple de 8 contenu dans 61 ; le quotient est donc 7 et le reste 5.

51. 2me Cas. — *Le diviseur est quelconque, mais le quotient n'a qu'un chiffre.*

Nous ferons le raisonnement sur un exemple numérique, sans rien supposer d'ailleurs de particulier aux deux nombres employés.

Soit à diviser 5489 par 756 ; nous remarquons que 5489 est compris entre 756 et dix fois 756 ou 7560 ; donc le quotient est compris entre un et 10 et n'a qu'un chiffre ; nous sommes dans le cas signalé. Pour trouver le quotient, il suffit d'essayer successivement les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jusqu'à ce qu'on en trouve un qui, multiplié par le diviseur, donne un nombre plus petit que 5489 et différent de celui-ci de moins de 756. Le quotient actuel est 7 et le reste est 197. Pour limiter le nombre des essais, on raisonne de la façon suivante : les 54 centaines du dividende contiennent d'abord le produit des 7 centaines du diviseur par le quotient, plus les centaines qui proviennent de la multiplication par le quotient de ce qui reste au diviseur c'est-à-dire 56, plus les centaines du reste ; en d'autres termes, et pour abréger, nous dirons que les 54 centaines du dividende contiennent le produit par le quotient des 7 centaines du diviseur, plus d'autres centaines. Si donc on divise 54 par 7, on aura le quotient ou un nombre trop fort ; on essaiera ce nombre, ou bien 9, si le nombre trouvé est plus grand que 9, car on sait que le quotient ne dépasse pas 9 : cet essai se fera en multipliant le diviseur par le chiffre trouvé ou par 9 et en retranchant le produit obtenu du dividende ; si

la soustraction est possible, c'est que le chiffre employé convient; sinon, on le diminue de 1 et on recommence l'essai; si cet essai réussit, le nouveau chiffre est le quotient, sinon on le diminue de nouveau de 1, et on recommence l'essai ; et ainsi de suite. Généralement, un ou deux essais suffisent ; quelquefois il en faudra davantage. Dans l'exemple actuel, 54 divisé par 7, donne pour quotient 7, et 7 convient ; il n'y a donc aucun essai infructueux.

L'opération se dispose ainsi :

Dividende	5489	756	*diviseur*
	5292	7	*quotient.*
Reste	197		

On écrit d'abord le dividende ; à droite de ce nombre, on trace une barre verticale et on écrit à droite de cette barre, sur la même ligne que le dividende, le diviseur ; au-dessous du diviseur, on trace une barre horizontale et, au-dessous de cette barre, on écrit le quotient; quant au produit du diviseur par le quotient ou par le chiffre essayé, on le met au-dessous du dividende et on le retranche de ce nombre.

Pour abréger, on fait généralement la multiplication et la soustraction de chaque essai en même temps ; l'opération pratique ne contient alors que quatre nombres, le dividende et au-dessous le reste, à droite, le diviseur et au-dessous le quotient. L'opération simplifiée est alors

Dividende	5489	756	*diviseur*
Reste	197	7	*quotient.*

Pour lire cette opération on dit : 54 contient 7, 7 fois; 7 fois 6, 42, ôté de 49, reste 7 et je retiens 4 ; 7 fois 5, 35, et 4 de retenue, 39, ôté de 48, reste 9 et je retiens 4 ; 7 fois 7, 49, et 4 de retenue, 53, ôté de 54, reste 1.

Autre exemple : soit à diviser 5287 par 798 : 52 divisé

par 7 donne 7 pour quotient, mais si on essaie 7, on constate que le produit du diviseur par ce nombre ne peut pas se retrancher du dividende ; on en conclut que 7 est trop fort et on essaie 6 ; la soustraction est alors possible, et on a l'opération :

$$\begin{array}{r|l} 5287 & 798 \\ \cline{2-2} 499 & 6 \end{array},$$

dans laquelle le quotient est 6 et le reste 499.

Il peut arriver qu'en divisant le nombre qui marque dans le dividende les unités de même ordre que celles d'ordre le plus élevé dans le diviseur, on trouve un quotient supérieur à 10. Alors on commence les essais à 9, puisqu'on sait que le quotient est au plus égal à 9 ; si l'essai de 9 ne réussit pas, on le diminue de 1, puis, s'il est besoin, d'une nouvelle unité, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'essai effectué réussisse.

Ainsi pour diviser 1385 par 187, on constate d'abord que le quotient est plus petit que 10 ; puis, comme 13 centaines, divisées par une centaine, donnent pour quotient 13, on essaie 9 ; l'essai ne réussissant pas, on essaie 8 ; ce nombre ne convient pas davantage ; alors on essaie 7 et on constate que ce nombre convient ; l'opération est :

$$\begin{array}{r|l} 1385 & 187 \\ \cline{2-2} 76 & 7 \end{array};$$

le quotient est donc 7 et le reste 76.

Règle. — *Pour diviser un nombre* B *par un nombre* A, *inférieur à* B, *on cherche d'abord si le quotient est plus petit ou plus grand que* 10. *Supposons-le plus petit que* 10. *Alors on écrit le dividende et le diviseur sur la même ligne horizontale, le diviseur à droite du dividende, et on les sépare par une barre verticale ; on trace en outre une barre horizontale au-dessous du diviseur. Cela fait, on sépare à gauche du dividende le nombre qui représente les unités de*

plus haut rang dans le diviseur, et on divise ce nombre par le dernier chiffre à gauche du diviseur. Si le quotient trouvé ne dépasse pas 10, *on le garde pour en faire l'essai; sinon, on essaiera* 9. *L'essai de ce chiffre se fait en multipliant le diviseur par ce chiffre lui-même, et en retranchant le produit du dividende; si la soustraction est possible, le chiffre employé est le quotient, le reste trouvé est le reste de l'opération et celle-ci est terminée; si la soustraction est impossible, on diminue le chiffre essayé d'une unité, et on essaie le nouveau chiffre; si cet essai réussit, l'opération est terminée ; sinon on diminue encore le chiffre essayé d'une unité et on continue ainsi jusqu'à ce que la soustraction soit possible. Le dernier chiffre essayé est le quotient, et le reste de la soustraction est le reste de l'opération elle-même.*

Avec un peu d'habitude, on trouve presque immédiatement le quotient exact dans chaque cas, et l'on évite la plupart des essais infructueux.

52. 3me Cas. — *Division d'un nombre quelconque par un nombre quelconque.*

Nous allons faire le raisonnement relatif à ce cas sur un exemple numérique, tout en ne supposant, bien entendu, rien de particulier aux nombres employés.

Proposons-nous de diviser 2349608 par 4725. Nous remarquons que le dividende est compris entre 100 fois et 1000 fois le diviseur, et que, par conséquent, le quotient est compris entre 100 et 1000 ; le quotient contient donc 3 chiffres ; il se compose d'unités, de dizaines et de centaines ; mais, pour ce qui va suivre, il nous suffira de le diviser simplement en unités et en dizaines : c'est ainsi, par exemple, que nous dirons que, dans le nombre 4725, il y a 5 unités et 472 dizaines. Nous allons démontrer maintenant que *le nombre des dizaines du quotient est juste égal au quotient à une unité près du nombre des dizaines du dividende par le diviseur.*

Pour parvenir à ce résultat, désignons par q le quotient à une unité près du nombre 234960, qui représente le nombre des dizaines du dividende, par 4725 ; nous aurons, d'après la définition du quotient à une unité près,

$$4725 \times q \leqslant 234960 < 4725 \times (q + 1);$$

si nous multiplions par 10 les trois nombres qui figurent dans ces inégalités, leurs sens ne seront pas altérés, et nous aurons

$$4725 \times 10q \leqslant 2349600 < 4725 \times 10(q + 1).$$

Or le dividende est plus grand que 2349600 ; donc il est supérieur au produit $4725 \times 10q$; par conséquent le quotient total est au moins égal à $10q$ où à q dizaines. D'autre part, $4725 \times (q+1)$ est au moins égal à 234961 ; par conséquent, $4725 \times 10(q+1)$ n'est pas moindre que 2349610 ; et comme ce dernier nombre est supérieur au dividende, nous avons

$$4725 \times 10(q + 1) > 2349608;$$

il résulte de cette inégalité que le quotient total est inférieur à $10(q+1)$ ou à $q+1$ dizaines. En résumé, nous venons de voir que le quotient est au moins égal à q dizaines et qu'il est moindre que $q+1$ dizaines ; il contient donc exactement q dizaines et peut-être des unités. Nous aurons donc le nombre des dizaines du quotient en prenant le quotient à une unité près de 234960 par 4725.

Ce nouveau quotient est lui-même supérieur à 10 ; par un raisonnement en tout semblable au précédent, nous montrerions qu'on obtient les dizaines de ce nouveau quotient en cherchant le quotient à une unité près du nombre des dizaines du nouveau dividende par le diviseur ; et ainsi de suite. Dans le cas actuel, le quotient de 23496 par 4725 est plus petit que 10 ; il ne contient qu'un chiffre, et il n'y a pas à aller plus loin.

Le quotient de 23496 par 4725 est égal à 4 ; 4 est donc

le nombre des dizaines de dizaines, c'est-à-dire des centaines du quotient total ; le produit du diviseur 4725 par 4 centaines est 18900 centaines qui, retranché des centaines du dividende, 23496, donne pour reste 4596 centaines ; il reste donc au dividende 459608 ; ce nombre renferme le produit du diviseur par ce qui reste à trouver au quotient, plus le reste. On voit donc que la partie restante du quotient est le quotient à une unité près du nombre 459608 par le diviseur, 4725 ; le nombre des dizaines de cette dernière partie, c'est-à-dire le nombre des dizaines du quotient total, s'obtiendra en divisant 45960 par 4725; le quotient est 9 et le reste 3435 dizaines ; le second reste est donc 34358 et ce nombre renferme le produit du diviseur par les unités du quotient, plus le reste. Donc le quotient à une unité près du second reste, 34358, par le diviseur est le chiffre des unités du quotient ; ce chiffre est 7 et le reste 1283. Le quotient total est donc 497 et le reste de l'opération, 1283.

On dispose l'opération d'une manière analogue à celle qui a été employée dans le cas précédent : on écrit le diviseur à la droite du dividende, et on les sépare par une barre verticale ; au-dessous du diviseur on trace une barre horizontale, et au-dessous de cette barre on place le quotient; quant aux divers produits du diviseur par les chiffres obtenus successivement au quotient, on les écrit au-dessous du dividende, en tenant compte de l'ordre des unités qu'ils représentent, et en écrivant, à chaque fois, les unités de même ordre les unes au-dessous des autres; chacun d'eux doit être retranché du dividende partiel que l'on vient d'employer, et ce qui reste non employé de ce dividende doit être écrit à droite de la différence ainsi obtenue. Voici l'opération :

Dividende	23496.08	4725	*diviseur*
	18900	497	*quotient.*
1er reste	45960.8		
	42525		
2e reste	34358		
	33075		
Reste	1283		

Pour éviter les erreurs, on sépare à chaque fois, par une virgule ou un point, à la gauche du dividende employé, le nombre que l'on divise à ce moment par le diviseur, pour obtenir un chiffre au quotient.

On peut simplifier l'opération en effectuant, à chaque fois, en même temps que la multiplication du diviseur par le chiffre trouvé au quotient, la différence entre ce produit et le dividende employé : de cette façon on n'écrit à gauche de la barre verticale que le dividende et les divers restes obtenus.

Il est inutile, en outre, d'ajouter, à chaque fois, tous les chiffres non utilisés du dividende : on se borne à abaisser, à droite du reste que l'on vient d'obtenir, le premier des chiffres non utilisés du dividende ; on obtient ainsi le dividende partiel utile ; si ce dividende partiel se trouve être inférieur au diviseur, il donne pour quotient 0, le chiffre correspondant du quotient est 0, et ce dividende est lui-même le reste suivant ; il suffira donc d'abaisser un nouveau chiffre du dividende pour obtenir un nouveau dividende partiel, et, par suite, le chiffre suivant du quotient. Enfin les essais relatifs à chaque chiffre du quotient se font de tête, et l'opération ainsi simplifiée se dispose de la manière suivante :

Dividende	23496.08	4725	*diviseur*
Dividendes partiels	4596 0	497	*quotient.*
	343 58		
Reste	12 83		

Règle. — *Pour diviser un nombre quelconque,* B, *par un nombre quelconque aussi,* A, *on sépare à gauche du dividende autant de chiffres qu'il en faut pour avoir un nombre supérieur au diviseur, et le contenant moins de dix fois ; le quotient de ce nombre par le diviseur est le premier chiffre du quotient ; on retranche du dividende partiel ainsi adopté le produit du diviseur par le premier chiffre du quotient, et, à la droite de ce reste, on abaisse le premier chiffre non employé du dividende. On a ainsi un second dividende partiel qui, divisé par le diviseur, donne le second chiffre du quotient ; on retranche de ce second dividende le produit du diviseur par le second chiffre du quotient, et on abaisse, à droite du reste, le chiffre suivant du dividende; on a ainsi un troisième dividende partiel, qui donnera le troisième chiffre du quotient. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les chiffres du dividende ayant été abaissés successivement, on obtienne un reste inférieur au diviseur. L'opération est alors terminée, et le dernier reste obtenu est le reste de l'opération elle-même.*

Remarque I. — Lorsque le nombre des chiffres du quotient est grand, on abrège l'opération en formant à l'avance le tableau des multiples du diviseur par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ; chacune des divisions partielles se fait alors immédiatement, à la simple inspection de ce tableau, et sans qu'il y ait d'essai infructueux ; il suffit de voir quel est le plus grand multiple du diviseur contenu dans le dividende partiel employé ; le quotient est alors le chiffre qui a donné ce multiple ; quant au reste partiel qui doit conduire au dividende suivant, on l'obtient en prenant l'excès du dividende employé sur le plus grand multiple du diviseur qu'il contient.

Exemple : Soit à diviser 509108743569 par 25743. Nous avons disposé l'opération comme précédemment ; seulement nous avons mis à droite le tableau des neuf premiers multiples du diviseur.

```
50910.8743569 | 25743
25743         |-------
              | 19776589
 251678
 231687
  199917
  180201
   197164
   180201
    169633
    154458
     151755
     128715
      230406
      205944
       244629
       231687
        12942
```

$25743 \times 1 = 25743$
$25743 \times 2 = 51486$
$25743 \times 3 = 77229$
$25743 \times 4 = 102972$
$25743 \times 5 = 128715$
$25743 \times 6 = 154458$
$25743 \times 7 = 180201$
$25743 \times 8 = 205944$
$25743 \times 9 = 231687$

Remarque II. — Lorsque le diviseur n'a qu'un seul chiffre, on peut se dispenser de tout calcul intermédiaire, et écrire de suite le quotient, sans écrire les dividendes partiels, chacun d'eux étant plus petit que 100 et se retenant sans effort :

Exemple : Soit à diviser 53096 par 8 ; on dit le 8me de 53 est 6, il reste 5 ; le 8me de 50 est 6, il reste 2 ; le 8me de 29 est 3, il reste 5 ; le 8me de 56 est 7. L'opération se fait donc exactement et le quotient est 6637.

53. **Preuve de la division.** — Pour vérifier une division, il suffit de constater que le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient, plus le reste. A cet effet, on multiplie le diviseur par le quotient ou inversement, et, à ce résultat, on ajoute le reste. Ainsi, dans l'exemple précédent, on multiplie 19776589 par 25743, et on a :

$$\begin{array}{r} 19776589 \\ 25743 \\ \hline 59329767 \\ 79106356 \\ 138436123 \\ 98882945 \\ 39553178 \\ \hline 509108730627; \end{array}$$

à ce résultat, on ajoute le reste, 12942, et on a l'opération suivante :

$$\begin{array}{r} 509108730627 \\ 12942 \\ \hline 509108743569. \end{array}$$

Comme nous retrouvons exactement le dividende, nous en concluons qu'il y a de fortes présomptions pour que l'opération soit exacte.

54. **Propriétés simples relatives à la division.**

1° *Pour trouver le reste de la division par* A *d'une somme de plusieurs nombres* $B_1, B_2, \ldots, B_n$, *on fait la somme des restes que donnent ces divers nombres, et on prend le reste que donne cette somme, divisée par* A.

D'après la définition de la division avec reste, tout nombre B, divisé par A, donne une égalité de la forme

$$B = AQ + R, \quad (R < A),$$

Q désignant le quotient et R le reste ; Q peut être nul.

Nous avons donc, dans le cas actuel, les égalités suivantes :

$$\begin{array}{ll} B_1 = AQ_1 + R_1 & (R_1 < A), \\ B_2 = AQ_2 + R_2 & (R_2 < A), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ B_n = AQ_n + R_n & (R_n < A). \end{array}$$

Nous savons d'ailleurs que l'on peut ajouter plusieurs

égalités membre à membre, et écrire dans une somme les diverses parties dans un ordre quelconque ; nous pouvons donc écrire

$$B_1+B_2+\ldots+B_n=AQ_1+AQ_2+\ldots+AQ_n+R_1+R_2+\ldots+R_n.$$

Si nous divisons maintenant la somme $R_1+R_2+\ldots+R_n$ par A, nous pourrons remplacer cette somme par $AQ_{n+1}+R$, R étant plus petit que A, et nous aurons

$$B_1+B_2+\ldots+B_n=AQ_1+AQ_2+\ldots+AQ_n+AQ_{n+1}+R.$$

Mettons A en facteur dans tous les termes du second membre qui le contiennent, nous obtiendrons l'égalité définitive

$$B_1+B_2+\ldots+B_n=A(Q_1+Q_2+\ldots+Q_{n+1})+R; \quad (R<A).$$

Nous voyons donc que $Q_1+Q_2+\ldots+Q_{n+1}$ est le quotient et R le reste de la division de la somme $B_1+B_2+\ldots+B_n$ par A. Or R est aussi le reste de la division de $R_1+R_2+\ldots+R_n$ par A. La proposition que nous avions en vue est donc établie.

Conséquences. — *Si plusieurs nombres* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *sont exactement divisibles par un nombre* A, *leur somme est divisible exactement par* A.

En effet, chacun des restes $R_1, R_2, \ldots, R_n$ est nul, donc leur somme est nulle, et, par suite, le reste de la division par A de cette somme est nul. Autrement :

Chacun des nombres $B_1, B_2, \ldots, B_n$ peut être décomposé en groupes de A unités, puisqu'ils sont tous divisibles (*) par A, sans qu'il reste aucune unité non employée. Donc leur somme, que l'on obtient en réunissant tous les groupes en un seul, sera décomposée en groupes de A unités, sans qu'il reste aucune unité non employée, et par conséquent cette somme est divisible par A.

(*) On dit qu'un nombre est *divisible* par un autre, lorsqu'il le contient un nombre exact de fois.

Si l'on ajoute à un nombre quelconque B *un multiple de* A, *le reste de la division par* A *n'est pas altéré.*

Car soit $B = AQ + R \qquad (R < A)$

l'égalité qui provient de la division de B par A ; si l'on considère un multiple de A, $B_1 = AQ_1$, et que l'on ajoute cette égalité à la précédente, membre à membre, on aura

$$B + B_1 = A(Q + Q_1) + R ; \qquad (R < A)$$

$Q + Q_1$ est donc le quotient par A de $B + B_1$ et R le reste.

2° *Si l'on retranche d'un nombre* B_1 *un nombre* B_2, *plus petit que lui, le reste de la division de* $B_1 - B_2$ *par* A *s'obtient en prenant la différence des restes relatifs à* B_1 *et* B_2, *quand le reste de* B_1 *est plus grand que celui de* B_2 ; *on l'obtient en ajoutant au reste de* B_1 *le complément* (*) *à* A *du reste de* B_2, *quand celui-ci est plus grand que le reste de* B_1.

En effet, en divisant B_1 et B_2 par A, nous avons les égalités

$$B_1 = AQ_1 + R_1, \qquad (R_1 < A)$$
$$B_2 = AQ_2 + R_2 ; \qquad (R_2 < A)$$

Le nombre AQ_2 ne peut pas dépasser AQ_1, car le plus grand multiple de A contenu dans B_2 est au plus égal au plus grand multiple de A contenu dans B_1, puisque $B_2 < B_1$. Si donc R_2 est aussi plus petit que R_1, nous pouvons retrancher chaque partie de B_2 de la partie correspondante dans B_1. En procédant ainsi, nous aurons retranché B_2 de B_1, car nous pouvons décomposer le nombre B_1 en deux groupes, l'un, contenant les unités de AQ_1, l'autre les unités de R_1, et faire de même pour B_2, le décomposer en deux groupes, contenant, l'un, les unités de AQ_2, l'autre, les unités de R_2 ; il est clair alors qu'en enlevant les unités du groupe AQ_2 de celles du groupe AQ_1,

(*) Lorsque R est plus petit que A, on appelle *complément à* A du nombre R, le nombre qui manque à R pour valoir A, c'est-à-dire $A - R$.

puis les unités de R_2 de celles de R_1, on aura enlevé au nombre B_1 toutes les unités du nombre B_2. Nous avons donc

$$B_1 - B_2 = A(Q_1 - Q_2) + R_1 - R_2.$$

Or R_1 et R_2 étant tous deux plus petits que A, leur différence est plus petite que A; donc $R_1 - R_2$ est bien le reste de la division de $B_1 - B_2$ par A, et la première partie est établie.

Supposons maintenant $R_2 > R_1$. Dans le cas actuel $AQ_2 < AQ_1$, sans quoi B_2 serait plus grand que B_1; donc $Q_2 \leqslant Q_1 - 1$ et $Q_2 + 1 \leqslant Q_1$. On peut donc retrancher du groupe AQ_1 le groupe $A(Q_2 + 1)$; mais en procédant ainsi, on a retranché de AQ_1, A unités en trop, il faut donc les ajouter ensuite pour que rien ne soit changé; ajoutons-les au groupe R_1; nous pourrons alors soustraire R_2 de $A + R_1$, ou R_2 de A, et nous aurons l'égalité suivante :

$$B_1 - B_2 = A(Q_1 - Q_2 - 1) + A - R_2 + R_1.$$

Comme $A - R_2 + R_1$ est inférieur à A, puisque R_2 est plus grand que R_1, on voit que ce nombre est le reste de la division de $B_1 - B_2$ par A. Or ce nombre est la somme de R_1 et du complément à A de R_2, $A - R_2$; donc la seconde partie de la proposition est établie.

Conséquences. — *Si deux nombres sont divisibles par un nombre* A, *leur différence est divisible par* A.

Car si B_1 et B_2 sont tous deux divisibles par A, les restes sont nuls et, par suite, le reste de la différence est aussi nul, d'après ce qui précède. Autrement :

Si B_1 et B_2 sont tous deux exactement décomposables en groupes de A unités, et que l'on enlève de B_1 les unités de B_2, il restera un certain nombre de groupes de A unités, et, par conséquent, la différence $B_1 - B_2$ est divisible par A.

Si on retranche d'un nombre B_1 *un multiple de* A, *le reste de la division par* A *n'est pas altéré.*

Car si l'on a $B_1 = AQ_1 + R_1$ $(R_1 < A)$ et $B_2 = AQ_2$, le second reste est nul, et par conséquent le reste de la différence $B_1 - B_2$ est égal à $R_1 - 0$ ou à R_1; donc le reste de $B_1 - B_2$ est le même que celui de B_1.

La théorie que nous avons faite de l'opération, dans le troisième cas, s'appuie sur cette propriété.

La condition nécessaire et suffisante pour que la différence de deux nombres soit divisible par A, *est que leurs restes relatifs à* A *soient égaux.*

Soient B_1 et B_2 deux nombres tels que $B_1 > B_2$, comme dans tout ce qui précède. Si on les divise par A, on a $B_1 = AQ_1 + R_1$ et $B_2 = AQ_2 + R_2$, avec $R_1 < A$, $R_2 < A$.

Si les restes sont différents, le reste de $B_1 - B_2$ est $R_1 - R_2$ ou $A - R_2 + R_1$, suivant que $R_1 > R_2$ ou $R_1 < R_2$. Ce reste n'est donc pas nul.

Si les restes sont égaux, on a

$$B_1 - B_2 = A(Q_1 - Q_2),$$

et la division se fait exactement.

Exemples : Les nombres 428, 381, 357, 217, divisés par 35, donnent pour restes 8, 31, 7, 7. Donc la somme

$$428 + 381 + 357 + 217 = 1383$$

donne pour reste le même reste que la somme

$$8 + 31 + 7 + 7 = 53;$$

ce reste est 18.

La différence $428 - 357 = 71$ donne pour reste $8 - 7 = 1$.

La différence $428 - 381 = 47$ donne pour reste

$$8 + 35 - 31 = 12.$$

La différence $357 - 217 = 140$ est divisible par 35.

55. Suite des propriétés simples relatives à la division. — Nous avons vu, dans la théorie de la multiplication, qu'une égalité donne une nouvelle égalité quand on multiplie les deux membres par un même nombre.

De même il est évident que si deux nombres sont égaux et divisibles par un autre nombre, ils donnent le même quotient. Par conséquent, lorsqu'on pourra diviser les deux membres d'une égalité par un même nombre, on sera conduit à une nouvelle égalité.

1° *Si les diverses parties d'une somme sont divisibles par un même nombre, la somme est divisible par ce nombre, et on obtiendra le quotient en ajoutant les quotients donnés par les diverses parties de la somme.*

La première partie de cette proposition a déjà été établie. Pour démontrer la seconde, on peut raisonner de la façon suivante : soit $B = B_1 + B_2 + \cdots\cdots + B_n$ une somme de n nombres; si nous supposons chacun d'eux divisible par un nombre A, cela veut dire que l'on a

$$B_1 = AQ_1, \qquad B_2 = AQ_2, \ \ldots\ldots, \qquad B_n = AQ_n.$$

On a donc $B_1 + B_2 + \cdots\cdots + B_n = AQ_1 + AQ_2 + \cdots\cdots + AQ_n$.

Or nous avons vu que, dans le second membre, on peut mettre A en facteur; d'ailleurs le premier membre est égal à B. On a donc

$$B = A(Q_1 + Q_2 + \cdots\cdots + Q_n);$$

le nombre B est donc exactement divisible par A et le quotient est $Q_1 + Q_2 + \cdots\cdots + Q_n$.

2° *Pour diviser un nombre par un produit de plusieurs facteurs, lorsque la division se fait exactement, il suffit de diviser ce nombre par l'un des facteurs, puis le quotient par un autre facteur, puis le nouveau quotient par un nouveau facteur, et ainsi de suite.*

Soit $A = A_1A_2 \ldots\ldots A_n$ un produit de n facteurs; soit en outre B un nombre divisible par A; cela veut dire que $B = AQ$, Q étant un certain nombre entier. Mais cette égalité peut s'écrire

$$B = A_1A_2 \ldots\ldots A_nQ;$$

si donc nous désignons par Q_1 le produit $A_2A_3 \ldots\ldots A_nQ$,

nous voyons que B est égal à A_1Q_1; par suite Q_1 est le quotient de B par A_1; d'autre part, si nous désignons par Q_2 le produit $A_3A_4 \ldots\ldots A_nQ$, nous avons $Q_1 = A_2Q_2$; Q_2 est donc le quotient de Q_1 par A_2; nous agirons ainsi jusqu'à ce que nous soyons parvenu à Q, ce qui aura lieu quand nous aurons divisé successivement par tous les facteurs.

Exemple : 3990 est divisible par 105 et le quotient est 38. Or 105 est le produit $3 \times 5 \times 7$. Nous arriverons donc au quotient en divisant successivement par 3, 5, 7. Le nombre 3990 divisé par 3 donne pour quotient 1330; celui-ci divisé par 5 donne 266; enfin 266 divisé par 7 donne 38.

3° *Lorsqu'un produit de plusieurs facteurs est divisible par un nombre* A, *et que l'un des facteurs est aussi divisible par* A, *la division peut se faire en divisant simplement le facteur en question par* A.

Soit le nombre $B = B_1B_2 \ldots\ldots B_n$, supposé divisible par A, et supposons en outre que le facteur B_1 soit aussi divisible par A; cela veut dire que $B_1 = AQ_1$, Q_1 désignant un certain nombre entier. En remplaçant B_1 par AQ_1, nous pourrons écrire B de la façon suivante :

$$B = AQ_1B_2B_3 \ldots\ldots B_n;$$

sous cette forme nous voyons immédiatement que le quotient de B par A est $Q_1B_2B_3 \ldots\ldots B_n$, c'est-à-dire le produit donné, dans lequel le premier facteur B_1 a été divisé par A.

Remarque. — Dans les deux raisonnements qui viennent d'être faits, nous avons fait porter la démonstration sur des facteurs déterminés, quant à leur rang; mais cela n'enlève aucune généralité à nos raisonnements, car les facteurs d'un produit peuvent être écrits dans un ordre quelconque.

Exemple : $840 = 24 \times 5 \times 7$ est divisible par 4; le quotient est 210, et on l'obtient en divisant le premier fac-

teur par 4,

$$210 = 6 \times 5 \times 7.$$

Lorsqu'on voudra diviser un produit par un de ses facteurs, on divisera donc le facteur correspondant par lui-même, c'est-à-dire qu'on le remplacera par 1. Or dans un produit il est inutile d'écrire le facteur 1. Dans ce sens, nous dirons donc que l'on divise un produit de facteurs par l'un d'eux en supprimant ce facteur.

4° *On obtient le quotient de deux puissances d'une même lettre* A, *en affectant cette lettre d'un exposant égal à la différence entre les exposants du dividende et du diviseur, lorsque le premier est supérieur au second.*

En effet, si l'on a m plus grand que n, le produit A^{m-n} a été défini (n° 41), et nous avons démontré (n° 42) que $A^{m-n}A^n = A^{m-n+n}$ ou A^m. Donc A^{m-n} est le quotient de A^m par A^n. On a donc :

$$\frac{A^m}{A^n} = A^{m-n} \quad (m > n).$$

Autrement. — Le dividende contient m facteurs A, le diviseur en contient n; on obtiendra donc le quotient en supprimant n facteurs A au dividende.

Si m égale n, on a $\frac{A^m}{A^n} = 1$. L'expression A^{m-n}, qui est ici A^0, n'a plus aucun sens, mais nous pouvons lui en donner un, en la prenant égale à 1, $A^0 = 1$.

Nous pouvons généraliser maintenant la proposition 2°, en l'étendant au cas où le nombre B n'est pas divisible exactement par le nombre A.

5° *Pour trouver le quotient à une unité près d'un nombre* B *par un produit de facteurs* $A = A_1A_2.....A_n$, *on prend le quotient à une unité près de* B *par* A_1, *puis le quotient à une unité près de celui-ci par* A_2, *puis le quotient à une unité près de celui-ci par* A_3, *et ainsi de suite.*

En effet, si nous divisons B par A_1, nous obtenons

$$B = A_1Q_1 + R_1 \qquad (R_1 < A_1);$$

en divisant Q_1 par A_1, nous obtenons

$$Q_1 = A_2Q_2 + R_2 \qquad (R_2 < A_2); \text{ etc...}$$

Nous avons donc la suite d'égalités

$$\begin{aligned} B &= A_1Q_1 + R_1, \\ Q_1 &= A_2Q_2 + R_2, \\ Q_2 &= A_3Q_3 + R_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ Q_{n-1} &= A_nQ_n + R_n. \end{aligned}$$

Nous pouvons faire disparaître tous les quotients intermédiaires, en multipliant la première égalité par 1, la seconde par A_1, la troisième par A_1A_2, ..., la dernière par $A_1A_2 \ldots\ldots A_{n-1}$, et en les ajoutant les unes aux autres. Les produits A_1Q_1, $A_1A_2Q_2$, ..., $A_1A_2 \ldots\ldots A_{n-1}Q_{n-1}$ se trouvent alors chacun dans les deux membres et peuvent être supprimés. Il reste

$$B = A_1A_2 \ldots A_nQ_n + R_1 + A_1R_2 + A_1A_2R_3 + \cdots + A_1A_2 \ldots A_{n-1}R_n.$$

Cette égalité indiquera la division de B par le produit A, si le nombre

$$R = R_1 + A_1R_2 + A_1A_2R_3 + \cdots\cdots + A_1A_2 \ldots\ldots A_{n-1}R_n$$

est plus petit que A. Or chacun des nombres R_1, R_2, ..., R_n est respectivement plus petit que A_1, A_2, ..., A_n, et par suite au plus égal à $A_1 - 1$, $A_2 - 1$, ..., $A_n - 1$. Nous voyons donc que R est au plus égal au nombre suivant:

$$A_1 - 1 + A_1(A_2 - 1) + A_1A_2(A_3 - 1) + \cdots\cdots\cdots$$
$$+ A_1A_2 \ldots\ldots A_{n-1}(A_n - 1).$$

Dans cette expression, tous les nombres A_1, A_1A_2, ..., $A_1A_2 \ldots\ldots A_{n-1}$, se détruisent, car ils y figurent tous avec le signe + et avec le signe —, ce qui indique que chacun d'eux doit être à la fois soustrait et ajouté. Il ne reste que $A_1A_2 \ldots\ldots A_n - 1$ ou bien $A - 1$. Le nombre R est donc

au plus égal à $A - 1$ et désigne bien le reste de la division de B par A.

Exemple : Trouver le quotient à une unité près de 32549 par 105. Nous remarquons que 105 est le produit 3.5.7; le quotient de 32549 par 3 est 10849; celui de 10849 par 5 est 2169; enfin le quotient de ce nombre par 7 est 309, et, par conséquent, 309 est le quotient demandé.

Les divisions successives que nous venons d'indiquer donnent les égalités suivantes :

$$32549 = 10849 \times 3 + 2,$$
$$10849 = 2169 \times 5 + 4,$$
$$2169 = 309 \times 7 + 6;$$

pour faire disparaître les quotients intermédiaires, nous multiplions la seconde égalité par 3, la troisième par 3×5, et nous les ajoutons; les produits 10849×3, et $2169 \times 5 \times 3$ se trouvent dans les deux membres et peuvent être supprimés, sans que les deux membres cessent d'être égaux. Le résultat ainsi simplifié est alors

$$32549 = 309 \times 7 \times 3 \times 5 + 2 + 4 \times 3 + 6 \times 3 \times 5.$$

Le reste est donc $2 + 4 \times 3 + 6 \times 3 \times 5$ ou 104, ainsi qu'il est facile de le vérifier directement.

6° *On n'altère pas le quotient de deux nombres en les multipliant par un même nombre, mais le reste est multiplié par ce nombre.*

Soit à diviser B par A; si nous désignons par Q le quotient et par R le reste, nous aurons

$$B = AQ + R \qquad (R < A).$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par un nombre C; l'égalité ne cessera pas d'exister; nous savons d'ailleurs que pour multiplier une somme par un nombre il suffit de multiplier chacune des parties par ce nombre; par conséquent, en appliquant cette dernière propriété au second membre de l'égalité précédente, nous pourrons écrire $BC = ACQ + RC$.

Or, comme R est plus petit que A, il en résulte nécessairement que RC est plus petit que AC; donc l'égalité ci-dessus indique la division de BC par AC et nous montre que le quotient est Q et le reste RC. C'est ce qu'il fallait établir.

Exemple : 36 divisé par 7 donne pour quotient 5 et pour reste 1. Si nous multiplions ces deux nombres par 4, nous pouvons affirmer que 144 divisé par 28 donne pour quotient 5 et pour reste 4 ; c'est ce qu'il est facile de vérifier directement.

7° *Si deux nombres entiers sont tous deux divisibles par un même nombre, le reste de leur division est divisible par ce nombre; et si on les divise tous deux par le nombre en question, le nouveau quotient est le même que l'ancien ; quant au nouveau reste, il est égal à l'ancien divisé par le nombre dont on s'est servi.*

Soient deux nombres A et B que nous supposons divisibles tous les deux par un nombre C. Divisons B par A ; nous aurons l'égalité

$$B = AQ + R \qquad (R < A).$$

Puisque A est divisible par C, il en est de même de AQ; car dire que A est divisible par C, c'est dire qu'un groupe de A objets est exactement décomposable en groupes de C objets ; par conséquent, en répétant Q fois le groupe A, on répétera Q fois chacun des groupes C, et le nouveau groupe sera décomposé en groupes de C objets ; c'est dire que le nombre AQ est divisible par C.

Nous voyons donc que les deux parties de la différence $R = B - AQ$ sont divisibles par C ; nous pouvons donc en conclure, d'après une propriété établie au n° précédent, que cette différence est divisible par C.

Nous avons vu du reste que pour diviser les deux parties d'une somme par C, il suffit de diviser chacune d'elles par C, lorsque cela se peut ; cela résulte de l'égalité

$$B_1C + B_2C = (B_1 + B_2)C,$$

que nous avons établie antérieurement.

On pourrait d'ailleurs démontrer directement cette égalité, en partageant chacun des nombres en groupes de C unités. Rappelons-nous maintenant que pour diviser un produit de facteurs par un nombre C, il suffit de diviser l'un d'eux par C, quand cela se peut, et nous pourrons écrire

$$B' = A'Q + R',$$

B', A' et R' désignant les quotients de B, A et R par C. D'autre part, comme R est plus petit que A, le quotient R' est plus petit que le quotient A', et l'égalité précédente exprime la division de B' par A'. Le quotient est donc Q et le reste R', ce qu'il fallait établir.

Exemple : 108 divisé par 28 donne pour quotient 3 et pour reste 24. Si nous divisons 108 et 28 par 4, qui les divise tous deux exactement, nous pourrons affirmer que 27 divisé par 7 donne pour quotient 3 et pour reste 6, ce qu'il est facile de vérifier directement.

* 56. **Division de deux nombres entiers positifs ou négatifs.** — Nous nous placerons exclusivement dans le cas où, abstraction faite des signes du dividende et du diviseur, la division se fait exactement.

Nous désignerons par B le dividende, par A le diviseur et par C le quotient de leurs valeurs absolues : C est un nombre entier ordinaire, un nombre entier positif.

Nous appellerons toujours *quotient* d'un nombre B par un nombre A, le nombre, positif ou négatif, qui, multiplié par A, reproduit B. Nous chercherons évidemment ce nombre parmi les seuls nombres que nous connaissions jusqu'ici, les nombres entiers positifs et négatifs.

1° Lorsque B et A sont positifs, nous sommes dans le cas étudié jusqu'ici ; le quotient est le nombre positif C.

2° Lorsque B est négatif et A positif, le quotient ne peut être positif, car le produit d'un nombre positif par un nombre positif est un nombre positif et ne peut être égal à B. Le quotient actuel est $-C$, car le produit de A par $-C$ s'obtient en faisant le produit des valeurs absolues A et C, ce qui donne $|B|$, et en

donnant au résultat le signe — ; on trouve bien ainsi le nombre négatif B.

3° Lorsque B est positif et A négatif, le quotient est $-C$, car le produit de deux nombres négatifs est positif et égal au produit de leurs valeurs absolues.

4° Enfin, lorsque B et A sont tous deux négatifs, le quotient est C, car le produit d'un nombre négatif par un nombre positif est un nombre négatif, dont la valeur absolue est égal au produit des deux valeurs absolues.

En résumé, *le quotient de deux nombres, positifs ou négatifs, dont les valeurs absolues se divisent exactement, est positif ou négatif, suivant que les deux nombres ont ou n'ont pas le même signe ; il a pour valeur absolue le quotient des valeurs absolues.* De là les deux tableaux suivants :

$$\frac{21}{7} = 3 \qquad \text{ou} \qquad \frac{+}{+} = +$$

$$\frac{-21}{7} = -3 \qquad \frac{-}{+} = -$$

$$\frac{21}{-7} = -3 \qquad \frac{+}{-} = -$$

$$\frac{-21}{-7} = 3 \qquad \frac{-}{-} = +$$

* 57. **Quelques propriétés relatives aux sommes algébriques. — Remarque sur les égalités.** — Nous avons vu que l'on a, dans tous les cas,

$$A(B_1 + B_2 + \cdots + B_n) = (B_1 + B_2 + \cdots + B_n)A$$
$$= AB_1 + AB_2 + \cdots + AB_n = B_1A + B_2A + \cdots + B_nA.$$

Mais l'égalité

$$A(B_1 + B_2 + \cdots + B_n) = AB_1 + AB_2 + \cdots + AB_n$$

peut s'énoncer de la manière suivante :

Lorsque les diverses parties d'une somme algébrique sont divisibles par un même nombre, positif ou négatif, on obtient le quotient de cette somme par ce nombre, en divisant chacune des parties de la somme par le nombre en question.

S'il s'agit de diviser deux sommes algébriques l'une par l'autre, lors même que l'opération sur les valeurs de ces sommes se fait exactement, on ne peut qu'indiquer l'opération par le signe habituel de la division. Ainsi $\frac{A+B+C+D}{E+F+G}$ indique le quotient de la somme $A+B+C+D$ par $E+F+G$.

Pour se rendre compte de l'utilité des propriétés relatives aux

égalités que nous avons établies dans tout ce qui précède, il suffit de se rappeler que l'égalité $A = B$ exprime que les deux nombres A et B sont identiques, lorsque les opérations qui les donnent sont toutes effectuées. Mais il n'y aurait aucun intérêt à écrire que $7 = 7$ ou $-7 = -7$, une pareille égalité n'apprenant rien à celui qui l'écrit. Tandis que

$$7 = 12 - 5 \qquad \text{et} \qquad -7 = (-3) \times 5 + 8$$

indiquent des modes de décomposition des nombres 7 et -7. Les égalités en arithmétique ont toutes pour but d'indiquer des modes de décomposition des nombres entiers, ou bien d'indiquer quelles sont les combinaisons de nombres qui conduisent au même résultat.

Il est bien évident, d'après ce que nous avons dit, que si l'on ajoute le même nombre, positif ou négatif, à deux nombres égaux, on obtient le même résultat ; que si, de même, on multiplie deux nombres égaux par un même nombre, on a les mêmes produits ; etc. Ce ne sont pas ces propriétés simples relatives aux égalités qui exigent aucune démonstration.

Il suffit pour les concevoir et pour les établir d'avoir étudié à l'avance chacune des opérations de l'arithmétique dont il est fait mention. Ce sont les manières d'effectuer ces opérations sur les transformations diverses d'un nombre donné qui donnent lieu à de véritables propositions.

C'est le point de vue auquel nous nous sommes toujours placé, et que nous garderons dans la suite.

* 58. **Systèmes de numération.** — Dans le système de représentation des nombres entiers que nous avons étudié au chapitre I, les unités de chaque ordre se groupent dix par dix pour donner des unités de l'ordre immédiatement supérieur ; chaque nombre entier s'évalue en formant tous ces groupes, et en les réunissant entre eux pour former des groupes d'ordres supérieurs, jusqu'à ce que dans chaque ordre il n'y ait plus qu'un nombre de groupes inférieur à 10.

On donne ensuite un nom à chacun des dix premiers nombres, y compris le nombre zéro ; on donne aussi des noms aux unités des divers ordres.

Puis on combine ces noms, d'après une règle déterminée, pour avoir le nom d'un nombre entier quelconque. Quelques noms spéciaux se sont introduits dans le langage, quelques contractions se sont effectuées, et l'on s'est trouvé en possession de noms pour tous les nombres usuels.

La représentation écrite est encore plus simple, puisque les dix symboles, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ont suffi pour écrire tous les nombres.

Le nombre 10, qui est la base de tous les groupements effectués, se nomme la *base* du système de numération ordinaire, et ce système lui-même se nomme le *système décimal.*

Au lieu de prendre le nombre 10 pour base de toutes ces combinaisons et de tous ces groupements, on eût pu prendre tout autre nombre entier, par exemple 12. On eût alors réuni toutes les unités d'un nombre donné en groupes de 12, jusqu'à ce qu'il fût resté un nombre d'unités inférieur à 12, puis les nouveaux groupes en groupes de 12, jusqu'à ce que leur nombre fût tombé au-dessous de 12, et ainsi de suite. De cette façon, on eût obtenu les unités du premier ordre, du second ordre, du troisième ordre, etc. Il eût alors fallu donner des noms aux 12 premiers nombres, y compris zéro, ce qui est fait pratiquement ; puis, des noms aux unités des divers ordres, et un procédé absolument semblable à celui que nous avons employé dans la numération, nous eût alors permis de nommer les nombres entiers. L'usage serait ensuite venu apporter quelques noms particuliers et simplifier les plus usuels.

Exemple : 42, qui contient 3 groupes de 12 unités et 6 unités, eût pu se nommer trois-douze-six.

Nous donnerons à ce système particulier le nom de *système duodécimal.*

La représentation écrite est encore plus simple que la représentation parlée. Représentons en effet chacun des 12 premiers nombres, y compris 0, par un symbole particulier,

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta ;$$

tous les nombres pourront alors être écrits, en convenant, comme précédemment, que tout chiffre placé à gauche d'un autre représente des unités de l'ordre immédiatement supérieur.

Exemples : 42 s'écrit 36 dans le nouveau système, et 140 s'écrit $\beta 8$, car 140 contient 11 fois 12, c'est-à-dire β unités du second ordre, plus 8 unités du premier ordre.

Nous laisserons de côté la représentation parlée des nombres dans le nouveau système ; cette représentation n'a pas été faite et est sans intérêt pour nous.

Nous ne nous occuperons que de la représentation écrite, relativement à laquelle nous résoudrons deux problèmes qui sont fondamentaux.

1er Problème. — *Un nombre étant écrit dans le système duodécimal, écrire ce nombre dans le système décimal.*

Il nous suffira de savoir évaluer les unités de chaque ordre dans le système décimal, et de regarder un nombre comme étant la somme des nombres représentés par les unités des divers ordres qu'il renferme.

Une unité du second ordre vaut 12 unités ordinaires,
une unité du troisième ordre vaut $12 \times 12 = 144$.....
une unité du quatrième ordre vaut $12 \times 144 = 1728$.....
une unité du cinquième ordre vaut $12 \times 1728 = 20736$.....
une unité du sixième ordre vaut $12 \times 20736 = 248832$.....
une unité du septième ordre vaut $12 \times 248832 = 2985984$....

. . . . . .

Prenons alors comme exemple le nombre

$$\alpha 579\beta,$$

écrit dans le système duodécimal. Ce nombre vaut α unités du cinquième ordre, plus 5 unités du quatrième, plus 7 unités du troisième, plus 9 unités du second, plus β unités ordinaires. Il est donc égal à la somme

$$\alpha \times 20736 + 5 \times 1728 + 7 \times 144 + 9 \times 12 + \beta;$$

si on se rappelle que $\alpha = 10$ et $\beta = 11$, on a de suite

$$207360 + 8640 + 1008 + 108 + 11 \quad \text{ou} \quad 217127.$$

2° Problème. — *Étant donné un nombre écrit dans le système décimal, écrire ce nombre dans le système duodécimal.*

Soit le nombre 326748, écrit dans le système décimal. Pour avoir, dans le nouveau système, le chiffre des unités, il faut décomposer le nombre donné en groupes de douze unités, et en une partie contenant moins de douze unités ; l'ensemble des premiers groupes est un nombre divisible par 12, un multiple de 12 ; donc la deuxième partie, c'est-à-dire le chiffre des unités, est le reste obtenu en divisant le nombre donné par 12. On a ainsi

$$326748 = 27229 \times 12 + 0;$$

le chiffre des unités est 0. Le quotient 27229 désigne combien il y a d'unités du second ordre dans le nombre proposé ; si on le décompose en deux parties, l'une, ne contenant que des groupes de douze unités, l'autre, inférieure à 12, cette dernière sera le chiffre des unités du second ordre, et le quotient de la première par 12 sera le nombre des unités du troisième ordre du nombre donné. Ces deux nombres s'obtiendront en divisant 27229 par 12, ce qui donne

$$27229 = 2269 \times 12 + 1;$$

le chiffre des unités du second ordre est donc 1, et le nombre des unités du troisième ordre est 2269. En traitant ce nombre comme les précédents, on a le chiffre des unités du troisième ordre et le nombre des unités du quatrième ordre, et ainsi de suite. Lorsqu'on arrive à un quotient plus petit que 12, il n'y a pas lieu de le décomposer, et il exprime le chiffre des unités de l'ordre le plus élevé. Toutes ces divisions se réunissent en une seule opération, de la façon suivante :

326748	12				
86	27229	12			
27	32	2269	12		
34	82	106	189	12	
108	109	109	69	15	12
— 0 —	— 1 —	— 1 —	— 9 —	— 3 —	— 1 —

Le nombre donné s'écrit donc 139110 dans le système duodécimal.

Pour traiter ce second problème, on aurait pu chercher quelle est l'unité d'ordre le plus élevé contenue dans le nombre donné, et combien de fois elle s'y trouve contenue; le chiffre ainsi obtenu au quotient est le chiffre des unités d'ordre le plus élevé dans le nombre choisi. On trouvera de même le chiffre des unités d'ordre le plus élevé qu'il y a dans le reste, et ainsi de suite. On a ainsi les divers chiffres du nombre, dans le système duodécimal, à condition de remplacer par des 0 les chiffres des unités d'ordres qui manquent.

Dans cette nouvelle méthode, les chiffres sont obtenus en parcourant le nombre de gauche à droite, tandis que dans la méthode précédente, le nombre était parcouru de droite à gauche.

Il est bien entendu que l'on entend par chiffre dans cette seconde question, l'un quelconque des symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β.

Le système *duadique* (*) est le système de base 2. Les seuls chiffres utilisés dans ce système sont 0 et 1.

Le nombre 100 s'écrit 1100100 dans le système duadique.

On voit par cet exemple l'inconvénient de prendre une base trop peu élevée : il faut un grand nombre de chiffres pour représenter les nombres les plus usuels.

(*) On appelle aussi ce système le système *binaire*. Inversement, le système décimal s'appelle aussi parfois système *décadique*.

EXERCICES

1° Faire la somme des nombres 127643, 281997, 208, 756, 122[illegible].

2° Un propriétaire paye 512f d'impôts par an, 468f pour réparation et amortissement de matériel, 1259f pour gages à ses serviteurs, 896f pour assurances diverses et 2857f pour dépenses de toute nature. Combien dépense-t-il par an ?

3° Un hameau se compose de cinq maisons. Le propriétaire de la première récolte 983 décalitres de blé par an, en moyenne, 105 de seigle, 748 d'avoine et 124 d'orge ; le propriétaire de la seconde récolte 345 décalitres de blé, 196 d'avoine, 76 de seigle et 97 d'orge ; celui de la troisième 1146 décalitres de blé, 267 de seigle, 892 d'avoine et 113 d'orge ; celui de la quatrième 205 décalitres de blé, 91 de seigle, 126 d'avoine et 55 d'orge ; celui de la cinquième 687 décalitres de blé, 137 de seigle, 549 d'avoine et 103 d'orge. Combien y a-t-il eu de décalitres de blé, de seigle, d'avoine ou d'orge récoltés dans ce hameau ?

4° Retrancher de 1827436 la somme des nombres 543895, 201810, 763, 842, 1177.

5° Quels sont les compléments à 150000 de 87329, 6236, 111845 ?

6° Un négociant doit à diverses personnes 46857f, 23741f, 12796f, 4327f ; d'autre part, on lui doit 112725f et 97836f. Combien lui restera-t-il une fois son avoir rentré et ses dettes payées ?

7° Une commune dépense en une année 978f pour dépenses courantes, 2197f pour réfection d'une partie du cadastre, 3175f pour réparation de l'église et du presbytère, 9478f pour construction d'une maison d'école. Ses recettes habituelles sont de 1399f. Combien doit-elle demander à l'emprunt pour faire face à ses engagements ?

8° Sachant que le budget des dépenses d'un grand pays se répartit entre les divers ministères, et que le ministère de la guerre dépense 975842327f, celui de la marine 324239115f, celui des finances, service de la dette compris, 1748111006f, celui de l'instruction publique 312136885f et les autres ministères ensemble 248735007f ; sachant d'autre part que les recettes de l'État s'élè-

vent à 3221625847f, trouver la somme qu'il doit demander à l'emprunt pour couvrir ses dépenses.

9° Un mètre d'étoffe coûte 16f, combien coûtent 7148 mètres?

10° Un commissionnaire fait 32 kilomètres par jour, les jours ordinaires, et 17 kilomètres le dimanche. Combien fait-il de kilomètres en trois semaines?

11° Un employé gagne 237f par mois; d'autre part, il gagne 3f chaque jeudi et chaque samedi pour des travaux supplémentaires. Combien gagne-t-il en une année, en supposant qu'il y ait juste 12 mois et 52 semaines dans l'année?

12° Le jour se partage en 24 heures, l'heure en 60 minutes, la minute en 60 secondes. Combien y a-t-il de secondes en 7 heures 35 minutes 26 secondes? Combien y a-t-il de secondes en 2 jours? De minutes en une semaine? Combien y a-t-il de minutes en moins dans le mois de février qu'en janvier, une année non bissextile?

13° La circonférence se partage en 360° et le degré en 60 minutes. Combien y a-t-il de minutes dans la circonférence entière? Sachant que le degré terrestre vaut 25 lieues, combien y a-t-il de lieues dans la circonférence de la terre?

14° Le son parcourt 340 mètres par seconde. En supposant la vitesse de la lumière infinie, à quelle distance se trouve un nuage orageux sachant que 8 secondes se sont écoulées entre un éclair et le bruit du tonnerre?

15° Un spéculateur achète 1286 hectares de bois, pour 1452876f; il en vend 337 hectares à 1465f l'hectare, 248 à 1389f, et 157 à 1500f; les autres hectares à 1236f. Combien a-t-il gagné?

16° Le côté d'un carré a 37 mètres; trouver la longueur du contour, la superficie et le prix de ce terrain, sachant qu'il vaut 17f le mètre carré.

17° Un terrain a la forme d'un rectangle, sa longueur est de 307 mètres, sa largeur 42 mètres. Sachant qu'il a coûté 8756f, combien gagne-t-on en le vendant 5f le mètre carré?

18° Trouver les carrés, les cubes des 9 premiers nombres, puis leurs quatrièmes puissances et leurs sixièmes puissances.

19° La lumière parcourt environ 74500 lieues par seconde; trouver la distance du soleil à la terre, en lieues et en kilomètres, sachant que la lumière met 8 minutes 18 secondes pour venir du soleil à la terre. Trouver la distance d'une étoile à la terre,

sachant que la lumière met une année à parcourir cette distance.

20° Un marchand achète 835 hectolitres de vin rouge à 57f l'hectolitre et 356 hectolitres à 21f de moins l'hectolitre. Il mélange ces deux espèces de vin et conduit le mélange à Paris; le transport lui coûte 4f par hectolitre, les autres frais s'élèvent à 1142f; il perd 7 hectolitres du mélange et vend le reste 66f l'hectolitre. Combien gagne-t-il ?

21° Un négociant achète 6483 mètres de drap pour 97245f. Combien coûte le mètre ? Quelle somme gagne-t-il s'il revend le mètre 17f ?

22° Un commissionnaire fait 35 kilomètres par jour ordinaire et 18 kilomètres le dimanche. Combien met-il de temps pour parcourir 336 kilomètres, sachant qu'il part un dimanche matin, et que le dernier jour il ne fait que les kilomètres restant à faire ?

23° Partager 972 en deux parties dont la différence soit 46.

24° Combien y a-t-il de dimanches et de jeudis dans une année ordinaire, sachant que le 1er janvier est un jeudi ?

25° Une pièce de canon est à 5340 mètres d'un observateur. Combien s'écoule-t-il de temps entre l'éclair et le bruit du canon, sachant que le son parcourt 340 mètres par seconde ?

26° Une fontaine fournit 95 hectolitres d'eau en 5 heures, une seconde fontaine fournit 204 hectolitres d'eau en 12 heures, une troisième 315 hectolitres d'eau en 15 heures. Combien mettront-elles de temps pour remplir ensemble un bassin contenant 5643 hectolitres ?

27° Un enfant a 7 ans, son père a 58 ans. Quel sera l'âge du fils quand l'âge de son père sera quatre fois le sien ?

28° Deux stations A et B sont à 812 kilomètres l'une de l'autre; un train part de A pour aller vers B avec une vitesse de 52 kilomètres à l'heure ; un autre part de B pour aller vers A avec une vitesse de 64 kilomètres à l'heure ; les deux trains partent en même temps. A quelle distance de A se recontreront-ils ?

29° Faire voir que dans une division le reste est toujours moindre que la moitié du dividende.

30° Connaissant la somme de deux nombres et leur différence, trouver ces deux nombres.

31° Quels sont les nombres qui, divisés par A, donnent un quotient égal au reste ?

32° Quels sont les nombres, qui, divisés par 9, donnent pour quotient le complément à 9 du reste ?

33° On écrit la suite naturelle des nombres sans séparer les chiffres, 123456789101112. Quel est le chiffre placé au 51967e rang ? A quel nombre appartient-il ?

34° Écrire le nombre 456723 dans le système ternaire.

35° On peut prendre les symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$, $\overline{8}$, $\overline{9}$ pour représenter les 19 premiers nombres dans le système de base 20. Trouver la valeur du nombre $\overline{9}6\overline{5}$, dans le système décimal. Écrire, au contraire, le nombre 576497 dans le système de base 20.

CHAPITRE VI

DIVISIBILITÉ

59. Tout nombre A qui divise exactement un nombre B se nomme un *diviseur* de B.

Un *diviseur commun* à plusieurs nombres est un nombre qui les divise tous exactement.

Nous avons vu que si un nombre A divise un nombre B, il divise tout multiple de B : la démonstration de cette propriété est d'ailleurs évidente.

Nous avons vu, en outre, que tout diviseur commun à plusieurs nombres est un diviseur de leur somme, que tout diviseur commun à deux nombres est diviseur de leur différence.

Un diviseur A de B s'appelle quelquefois un *sous-multiple* de B ; B est un multiple de A.

60. **Caractère de divisibilité par 2.** — Les nombres divisibles par 2 s'appellent nombres *pairs ;* les autres sont les nombres *impairs.*

On obtient la suite des nombres pairs en partant de 0 et en ajoutant 2 à chaque fois. Ce sont donc les nombres que l'on rencontre de 2 en 2 dans la suite naturelle des nombres entiers, en partant de 0. Le nombre 0 est divisible par un nombre entier quelconque A ; car on a

$$0 = A \times 0 + 0.$$

Nous pourrons donc dire que 0 est un nombre pair, et la suite des nombres pairs est

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots\ldots ;$$

la suite des nombres impairs est

1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

On appelle *chiffres pairs* ceux qui représentent des nombres divisibles par 2 ; ce sont :

2, 4, 6, et 8 ;

on peut y joindre 0.

THÉORÈME. — *Un nombre est ou n'est pas divisible par 2 suivant qu'il est terminé par un chiffre pair ou non.*

En effet, tout nombre entier peut se diviser en deux parties : l'une contenant toutes les dizaines du nombre, et l'autre, les unités. Or le nombre 10 étant divisible par 2, tout nombre exact de dizaines est divisible par 2 ; par conséquent la première partie est divisible par 2. Désignons alors par a le chiffre des unités du nombre donné, A ; nous aurons

$$A = \text{mult. } 2 + a = 2m + a,$$

m étant un certain nombre entier. D'après la première proposition du n° 54, il n'y a plus qu'à diviser a par 2 pour avoir le reste de l'opération ; si donc a est pair, la division se fait exactement ; sinon le reste est égal à 1.

Exemples : 2168 est divisible par 2 et 2451 donne pour reste 1.

61. **Caractère de divisibilité par 5.** — THÉORÈME. — *Un nombre est ou n'est pas divisible par 5, suivant qu'il est terminé soit par 0 ou 5, soit par tout autre chiffre. Le reste de la division d'un nombre par 5 s'obtient en divisant le chiffre des unités par 5.*

La démonstration est absolument semblable à la précédente, et nous ne jugeons pas utile de la faire.

Les multiples de 5 sont

0, 5, 10, 15, 20, 25, ...

Exemples : 135 est divisible par 5, 137 divisé par 5 donne pour reste 2, 103 donne pour reste 3.

62. **Caractère de divisibilité par 4 ou par 25.** — THÉORÈME. — *Un nombre est ou n'est pas divisible par 4 ou par 25, suivant que la partie formée par les deux derniers chiffres à droite est ou n'est pas divisible par 4 ou par 25.*

Le reste s'obtient, dans tous les cas, en divisant cette partie du nombre par 4 ou par 25.

La démonstration est semblable à celle que nous avons déjà faite au n° 60. Nous dirons ici : tout nombre peut se décomposer en deux parties, l'une contenant toutes les centaines du nombre, l'autre, les dizaines et les unités. Or, le nombre 100 est exactement divisible par 4 et par 25 ; donc tout nombre exact de centaines forme un nombre divisible exactement par 4 et par 25. Désignons alors le nombre qui contient les dizaines et les unités de A par a; nous aurons, suivant le cas,

$$A = \text{mult. } 4 + a = 4m + a,$$
$$A = \text{mult. } 25 + a = 25n + a,$$

m et n désignant certains nombres entiers ; nous aurons donc le reste de la division, en divisant a par 4 ou par 25.

Exemples : 436 est divisible par 4, car 36 est un multiple de 4 ; 525 est divisible par 25, pour une raison analogue ; 441 divisé par 4 donne le même reste que 41, c'est-à-dire 1 ; le même nombre divisé par 25 donne pour reste 16.

63. **Caractère de divisibilité par 8 ou par 125.** — THÉORÈME. — *Un nombre est ou n'est pas divisible par 8 ou par 125, suivant que le nombre formé par les trois derniers chiffres à droite est ou n'est pas divisible par 8 ou par 125.*

Le reste s'obtient, dans tous les cas, en divisant cette dernière partie à droite par 8 ou par 125.

La démonstration est absolument semblable à la précédente et nous ne la ferons pas.

Exemples : 164096 est divisible par 8, 164500 est divisi-

ble par 125 ; 164101, divisé par 8, donne le même reste que 101, c'est-à-dire 5 ; divisé par 125, il donne pour reste 101.

64. Caractère de divisibilité par 3 ou par 9. — Théorème. — *Le reste de la division d'un nombre par 3 ou par 9 s'obtient en divisant par 3 ou par 9 la somme de ses chiffres.*

De l'égalité

$$10 = \text{mult. } 3 + 1 \quad \text{ou} \quad 10 = \text{mult. } 9 + 1,$$

que l'on peut écrire

$$10 = 3 \times 3 + 1 \quad \text{ou} \quad 10 = 9 \times 1 + 1,$$

on déduit immédiatement, en multipliant les deux membres par 10, que 100 est aussi un multiple de 3 ou de 9 augmenté de 1. On aura donc

$$100 = 3m + 1 \quad \text{et} \quad 100 = 9n + 1,$$

m et n désignant ici les entiers 33 et 11. En multipliant les deux membres de ces égalités par 10, on aura

$$1000 = 3 \times 10m + 10 \quad \text{et} \quad 1000 = 9 \times 10n + 10 ;$$

on voit donc que 1000 est aussi un multiple de 3 ou de 9 augmenté de 1 ; et ainsi de suite : d'une manière générale, les nombres représentés par les unités des divers ordres sont tous des multiples de 3 ou de 9 augmentés de 1.

Si donc on considère un nombre composé exactement de A unités d'un certain ordre, ce nombre sera un multiple de 3 ou de 9, augmenté de A. Il en résulte donc, qu'en décomposant un nombre quelconque en ses unités des divers ordres, on obtiendra un multiple de 3 ou de 9, augmenté de la somme des nombres représentant ces diverses unités ; en d'autres termes, un nombre est un multiple de 3 ou de 9, augmenté de la somme de ses chiffres. Donc en divisant cette somme par 3 ou par 9, on aura le reste relatif à 3 ou à 9.

Prenons pour exemple le nombre 786845 ; nous avons vu au début que

$$1 = \text{mult } 3 + 1 = \text{mult } 9 + 1$$
$$10 = \text{mult } 3 + 1 = \text{mult } 9 + 1$$
$$100 = \text{mult } 3 + 1 = \text{mult } 9 + 1$$
$$1000 = \text{mult } 3 + 1 = \text{mult } 9 + 1$$
$$10000 = \text{mult } 3 + 1 = \text{mult } 9 + 1$$
$$100000 = \text{mult } 3 + 1 = \text{mult } 9 + 1,$$

dans chacune de ces égalités le mot *mult.* représentant un certain nombre entier. Multiplions les premières égalités par 5, les secondes par 4, les troisièmes par 8, les quatrièmes par 6, les cinquièmes par 8 et les sixièmes par 7, puis ajoutons; nous aurons

$$786845 = m.\ 3 + (5 + 4 + 8 + 6 + 8 + 7)$$
et $$786845 = n.\ 9 + (5 + 4 + 8 + 6 + 8 + 7).$$

Nous aurons donc le reste relatif à 3 ou à 9 en divisant la somme des chiffres, $5+4+8+6+8+7$ ou 38, par 3 ou par 9; dans les deux cas, le reste est 2.

Exemples : 1971 est divisible par 3 et par 9; 1941 n'est divisible que par 3 et le reste relatif à 9 est 6; 1922 n'est divisible ni par 3 ni par 9; les restes sont 2 et 5.

65. Caractère de divisibilité par 11. — THÉORÈME. — *Pour obtenir le reste d'un nombre relatif à 11, on forme la somme des chiffres de rangs impairs, celle des chiffres de rangs pairs; si la première somme surpasse la seconde, le reste est le même que celui de la différence de ces sommes; si la seconde somme surpasse la première, le reste est le complément à 11 du reste relatif à cette différence.*

Pour se rendre compte de cette propriété, il suffit de remarquer que l'on a

$$1 = 11 \times 0 + 1$$
$$10 = 11 \times 1 - 1$$
$$100 = 11 \times 9 + 1$$
$$1000 = 11 \times 91 - 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

en d'autres termes, chacune des unités d'ordre impair est un multiple de 11, augmenté de 1, chacune des unités d'ordre pair, un multiple de 11, diminué de 1. Les deux premières égalités sont évidentes ; la troisième s'obtient en multipliant les deux membres de la seconde par 10 et remplaçant 10 par $11 - 1$; la quatrième se déduit de la troisième par le même procédé ; et ainsi de suite. Deux mots d'explication sont cependant nécessaires pour comprendre comment on passe de la seconde à la troisième, par exemple ; la seconde, multipliée par 10, nous donne en effet

$$100 = 10 \times 11 - 10;$$

or pour retrancher 10 d'un nombre, il revient au même de retrancher 11 d'abord et d'ajouter 1 ensuite ; on a ainsi

$$100 = 9 \times 11 + 1.$$

Cela posé, soit un nombre formé par les chiffres a, b, c, d, e, f, que l'on obtient en parcourant le nombre de droite à gauche. En multipliant les six premières égalités, écrites antérieurement, respectivement par a, b, c, d, e, f, on aura :

$$\begin{aligned} a &= \quad a \\ 10b &= m_1 11 - b \\ 100c &= m_2 11 + c \\ 1000d &= m_3 11 - d \\ 10000e &= m_4 11 + e \\ 100000f &= m_5 11 - f; \end{aligned}$$

si l'on ajoute toutes ces égalités, membre à membre, on obtient, d'un côté, le nombre donné, N, de l'autre côté, un multiple de 11, augmenté des chiffres de rangs impairs, a, c, e, et diminué des chiffres de rangs pairs b, d, f ; on a donc

$$N = m11 + (a + c + e) - (b + d + f).$$

Or nous pouvons réunir $11m$ à la somme $a + c + e$; nous avons alors une différence, dont le reste s'obtient (n° 54, 2°) en prenant la différence des restes des deux parties, si le premier reste surpasse le second, et en prenant

le complément à 11 de cette différence, si le second reste surpasse le premier. D'ailleurs le reste de la première partie, $11m + a + c + e$, est le même que celui de $a + c + e$; le théorème est donc complètement établi.

Exemples: 876845 a pour somme des chiffres de rangs impairs, 20, et pour somme des chiffres de rangs pairs, 18; le premier reste est 9, le second, 7; le reste donné par le nombre est donc $9 - 7 = 2$. Le nombre 786573 donne pour premier reste 5, pour second reste 9; le reste du nombre donné est donc le complément à 11 de 4, c'est-à-dire 7. Enfin le nombre 685476 est divisible par 11.

Remarque. — Nous verrons dans les compléments une manière plus simple d'énoncer le caractère de divisibilité par 11; nous donnerons en outre le caractère de divisibilité par 7, et nous généraliserons, autant que cela se peut, les résultats que nous venons d'obtenir, et que nous aurons ainsi étendus.

66. Preuves d'une opération par 3, par 9, par 11, etc. — Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de vérifier une addition. Nous prendrons les restes des diverses parties de la somme par 3; nous ferons la somme de ces restes, et nous prendrons le reste de cette somme relatif à 3. Si ce reste est le même que celui de la somme totale, il y aura présomption pour que l'opération soit exacte. Si l'on cherche de même les restes relatifs à 9 et à 11, et qu'à chaque fois le reste de la somme totale soit égal à la somme des restes des parties, la probabilité d'exactitude de l'opération sera augmentée.

L'inconvénient de ces sortes de preuves, en ce qui concerne l'addition, tient à ce qu'il faut faire usage d'opérations de nature plus compliquée que l'addition elle-même. Mais cet inconvénient est bien racheté par l'extrême simplicité de chacune de ces opérations, simplicité qui apparaît

d'autant mieux que l'addition à vérifier porte sur de plus grands nombres.

Cependant les opérations accessoires que nous indiquons ici exigent que le caractère de divisibilité du diviseur ou module employé soit très simple ; c'est ce qui arrive pour les modules 3, 9 et 11, et c'est ce qui fait que ce sont les seuls employés pour ces sortes de vérification.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une soustraction. Nous prendrons les restes des deux parties, relatifs à l'un des trois modules signalés ; si le reste du plus grand nombre surpasse celui du plus petit, le reste de la différence sera la différence des restes ; sinon, on prend le complément au module employé de la différence des restes ; on devra trouver le même reste en opérant sur le résultat de la soustraction.

S'il s'agit d'une multiplication, désignons par A et B le multiplicande et le multiplicateur, par a et par b leurs restes relatifs à l'un des trois modules signalés, par exemple 9, nous aurons :

$$A = m9 + a,$$

$$B = n9 + b;$$

or nous avons vu que pour multiplier deux sommes entre elles, il suffit de les multiplier terme à terme et d'ajouter les résultats ; trois de ces produits partiels contiendront 9 en facteur, c'est-à-dire formeront un nombre divisible par 9, et nous aurons

$$AB = 9p + ab.$$

Donc le reste du produit par 9 s'obtient en prenant le reste du produit des restes, ab. Si ce reste est égal à celui trouvé directement pour le produit de la multiplication donnée, on en conclut que la vérification a réussi.

Exemple : Soit à vérifier la multiplication :

$$\begin{array}{r} 74962 \\ 568 \\ \hline 599696 \\ 449772 \\ 374810 \\ \hline 42578416 \end{array};$$

le reste relatif au module 3, donné par le multiplicande, est 1 ; celui du multiplicateur est 1 ; celui du produit doit donc être égal à 1, ce qui est. Les restes relatifs à 9 sont 1, 1 et 1. Les restes relatifs à 11 sont 8, 7 et 1 ; or $8 \times 7 = 56$, dont le reste est 1. Les trois vérifications ont donc réussi.

S'il s'agit de la division d'un nombre B par un nombre A, cette opération a donné deux nombres entiers, Q et R, R étant plus petit que A, et qui doivent vérifier l'égalité $B = AQ + R$. Désignons par b, a, q, r les restes de ces quatre nombres relatifs à l'un des modules 3, 9 ou 11, par exemple 11 ; nous aurons

$$B = 11m + b, \qquad A = 11n + a,$$
$$Q = 11m' + q, \qquad R = 11n' + r;$$

or nous venons de voir que $AQ = 11p + aq$. Donc la somme $AQ + R$ est un multiple de 11 augmenté de aq et r ; le reste de cette somme divisé par 11 sera donc le reste de la somme $aq + r$; on devra trouver ainsi le nombre b pour que la vérification réussisse.

Exemple : Soit à vérifier la division

$$\begin{array}{r|l} 23496.08 & 4725 \\ \cline{2-2} 45960 & 497 \\ 34358 & \\ 1283 & \end{array}$$

Prenons les restes relatifs à 11 ; ce sont, pour le dividende, 8, pour le diviseur, 6, pour le quotient et le reste, 2 et 7 ; 8 doit donc être le reste de la division par 11 de $6 \times 2 + 7$, ce qui est. Les restes relatifs à 9 sont 5, 0, 2 et 5 ; or $5 = 0 \times 2 + 5$; donc la vérification réussit encore.

On verrait de même que la vérification relative au module 3 réussit.

* 67. **Restes négatifs. — Restes des nombres négatifs.** — Si l'on fait usage des nombres négatifs, il est facile d'étendre la définition du reste.

Nous appellerons *reste* de B par rapport au module A, tout nombre, positif ou négatif, dont la valeur absolue soit inférieure A, et qui, retranché de B, donne pour différence un multiple de A.

Lorsque B n'est pas divisible par A, il est compris entre deux multiples consécutifs de A, AQ et $A(Q+1)$. La différence entre B et un de ces deux multiples est évidemment inférieure à A, en valeur absolue, et peut servir de reste ; tandis que la différence entre B et tout autre multiple de A est supérieure, en valeur absolue, à A ; par conséquent, le nombre B a deux restes relatifs au module A et deux seulement.

Si nous comparons B au premier multiple, AQ, nous avons $B = AQ + R$, R étant un nombre positif inférieur à A ; R est donc le reste ordinaire de la division de B par A. Si, au contraire, nous comparons B au second multiple, $A(Q+1)$, nous pouvons écrire, en tenant compte de l'égalité précédente, $B = A(Q+1) - A + R$. Le nombre négatif, $-A+R$ ou $-(A-R)$, est la différence entre B et le second multiple ; il est plus petit que A, en valeur absolue ; c'est donc le nouveau reste. On voit, en outre, que la valeur absolue du nouveau reste est le complément à A du reste ordinaire.

Tout nombre B, non divisible par A, a donc deux restes relatifs à A, l'un positif, l'autre négatif, et les valeurs absolues de ces restes sont complémentaires à A.

Exemple : 15 divisé par 8 donne les deux restes 7 et -1.

Si A est pair, il peut arriver que les valeurs absolues des restes soient toutes deux égales à la moitié de A ; sinon la valeur absolue de l'un d'eux est supérieure à celle de l'autre, et celui des deux restes qui a la plus petite valeur absolue se nomme le *reste minimum*.

Exemples : Les deux restes de 59, relatifs au module 6, sont 5 et -1, -1 est le reste minimum ; les restes de 55, relatifs au module 6, sont 1 et -5, 1 est le reste minimum ; les restes de 57, relatifs au module 6, sont 3 et -3 ; on peut prendre pour reste minimum celui que l'on veut.

Lorsque B est divisible par A, il n'y a qu'un seul reste, 0.

Les divers restes de toutes les divisions par A sont donc

$$1,\quad 2,\quad 3, \ldots\ldots \quad A-1,$$

$$-1, -2, -3, \ldots\ldots -(A-1).$$

Examinons maintenant le cas où le nombre B est négatif, le module A restant positif comme précédemment.

Lorsque le nombre négatif B n'est pas divisible par A, il est compris entre deux multiples négatifs consécutifs de A, $-AQ$ et $-A(Q+1)$; il diffère de chacun d'eux d'un nombre moindre que A, en valeur absolue ; car si l'on part de $-AQ$, il faut ajouter à ce multiple un nombre négatif, moindre que A, en valeur absolue, pour avoir le nombre B ; et si l'on part du second multiple, $-A(Q+1)$, il faut lui ajouter un nombre positif, moindre que A, pour avoir B. On a donc

$B = -AQ - R$, d'où $B = -A(Q+1) + A - R$; les deux restes sont donc $-R$ et $A - R$, et l'on voit que leurs valeurs absolues ont pour somme A, c'est-à-dire sont complémentaires à A.

Tout autre multiple de A diffère de B d'un nombre positif ou négatif, supérieur à A, en valeur absolue ; car s'il est représenté par $-AQ + AQ'$, il faut lui ajouter le nombre négatif $-AQ' - R$, pour avoir B, et s'il est représenté par $-A(Q+1) - AQ'$, il faut lui ajouter le nombre positif $AQ' + A - R$, pour avoir B. Le nombre B a donc deux restes relatifs au module A et deux seulement.

Lorsque B est divisible par A, il n'y a qu'un seul reste, le nombre 0.

Les restes donnés par B sont les restes de $-B$, changés de signes, car si l'on a $B = -AQ - R$, on a $-B = AQ + R$ (on sait que $-B$ est la valeur absolue de B, quand B est négatif) ; la seconde égalité $B = -A(Q+1) + A - R$, se traite de la même manière, et donne $-B = A(Q+1) - (A - R)$.

Nous n'emploierons jamais que des modules positifs, et nous venons de voir que tout nombre positif ou négatif B, a, par rapport à chacun d'eux, deux restes dont les valeurs absolues sont complémentaires au module, sauf dans le cas où B est divisible par le module, et où le reste unique est alors 0.

* 68. **Caractère de divisibilité par 7.** — Cherchons les restes successifs que donnent les unités des divers ordres du système décimal, divisées par 7. Pour cela, divisons l'unité, suivie d'un nombre indéterminé de 0, par 7. Nous aurons :

```
1000000 | 7
 30     |------
  20      0142857
   60
    40
     50
      1
```

Nous trouvons ainsi pour restes successifs 1, 3, 2, 6, 4, 5 ; à la droite de chacun d'eux, nous abaissons un 0 et l'opération se continue ainsi ; la septième opération nous donne de nouveau pour reste 1, et, par suite, à partir de ce moment, les opérations se reproduisent indéfiniment, dans le même ordre ; les 6 restes précédents se reproduisent donc aussi indéfiniment et dans le même ordre. Mais, au lieu des restes 6, 4, 5, nous pouvons prendre les restes complémentaires — 1, — 3, — 2, et nous aurons alors la suite des 6 restes

$$1, 3, 2, -1, -3, -2,$$

qui se reproduisent indéfiniment et dans le même ordre.

Cela posé, si nous considérons un nombre quelconque, N, que nous parcourions ce nombre de droite à gauche, et que nous appelions $a, b, c, d, e, f, g, \ldots$ les chiffres ainsi rencontrés, il nous est facile d'avoir le reste relatif au module 7. En effet, nous pouvons dire que ce nombre est la somme de a unités, b dizaines, c centaines, etc... Or, a unités est un multiple de 7, augmenté de a ; b dizaines est un multiple de 7, augmenté de $3b$, car une dizaine est un multiple de 7, augmenté de 3 ; de même, c centaines est un multiple de 7, augmenté de $2c$; et ainsi de suite. En définitive, un nombre quelconque est un multiple de 7, augmenté de la somme algébrique que l'on obtient en parcourant ce nombre de droite à gauche, et en multipliant ses divers chiffres respectivement par 1, 3, 2, — 1, — 3, — 2, 1, 3, 2..... ; le reste, positif ou négatif, que l'on obtient en divisant cette somme algébrique par 7, est donc l'un des deux restes que donne le nombre N.

Exemple : Considérons le nombre

$$183706570023864.$$

Au-dessous des chiffres de ce nombre, parcouru de droite à gauche, écrivons les restes 1, 3, 2, — 1, — 3, — 2, 1, 3..... ;

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 8 & 3 & & 7 & & 0 & & 6 & 5 & 7 & 0 & & 0 & & 2 & & 3 & 8 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & - & 2 & - & 3 & - & 1 & 2 & 3 & 1 & - & 2 & - & 3 & - & 1 & 2 & 3 & 1, \end{array}$$

et multiplions respectivement chacun des chiffres du nombre par le reste placé au-dessous de lui, puis ajoutons les résultats obtenus, d'après les règles connues ; nous aurons la somme 69, qui n'est pas divisible par 7 ; donc le nombre donné n'est pas divisible par 7.

Cette méthode permet d'obtenir rapidement le caractère de divisibilité par 11. En effet, les restes que donnent ici les unités du premier, du second, du troisième, etc. ordre sont 1, — 1, 1, — 1,..... On aura donc le reste de la division d'un nombre par 11, en formant la somme algébrique de ses chiffres, pris alternativement avec les signes *plus* et *moins*, et obtenus en

parcourant le nombre de droite à gauche. Le nombre précédent donne pour reste — 8 ou 3.

* **69. Caractère de divisibilité par un nombre quelconque positif A.** — On divise l'unité suivie d'un nombre indéterminé de 0 par A et on a ainsi les divers restes que donnent les unités des divers ordres du système décimal, divisées successivement par A. Si, à un certain moment, l'un des restes se reproduit, alors les opérations qui ont suivi se reproduisent indéfiniment et dans le même ordre. Or ceci arrive nécessairement, car les restes positifs relatifs à A sont en nombre limité, A — 1 ; donc, au bout d'un certain nombre d'opérations, on retombe forcément sur un reste déjà trouvé. A partir de ce moment, les restes qui suivent celui-ci se reproduisent indéfiniment et dans le même ordre ; la première partie des restes, celle qui précède celui dont on parle, ne se reproduit pas.

La décomposition d'un nombre quelconque en ses unités des divers ordres, et un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour le module 7, nous montrent de suite qu'il suffit de placer au-dessous des chiffres du nombre étudié et parcouru de droite à gauche, les restes que nous avons obtenus dans l'ordre où ils ont été trouvés, de multiplier chaque chiffre par le reste placé au-dessous de lui, de faire la somme de ces produits partiels et de prendre le reste de cette somme relatif à A, pour avoir le reste demandé.

On peut remplacer certains des restes par les restes négatifs complémentaires, si cela est plus simple, et faire alors la somme algébrique des produits, comme cela s'est fait pour 7 et pour 11.

Exemples : Le module 13 conduit aux restes 1, 10, 9, 12, 3, 4, qui se répètent indéfiniment dans cet ordre ; on peut prendre les restes 1, — 3, — 4, — 1, 3, 4.

Alors le nombre 47562823103 donne pour somme algébrique à considérer $3 - 4 - 3 + 6 + 32 + 2 - 18 - 20 - 7 + 12$ ou 3, dont le reste est 3.

Le module 17 conduit aux restes 1, 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12 ou 1, — 7, — 2, — 3, 4, 6, — 8, 5, — 1, 7, 2, 3, — 4, — 6, 8, — 5.

Le module 12 conduit aux restes 1, 10, 4, 4,. ..; les deux premiers ne se reproduisant pas, le reste 4 se reproduit indéfiniment.

Remarque. — Nous voyons donc qu'un caractère de divisibilité a pour but d'indiquer comment on trouve le reste d'un nombre donné relatif à un module déterminé, sans faire la division du nombre par le module. Pour qu'il y ait utilité dans la pratique à

faire usage de semblables procédés, il faut que le caractère de divisibilité indique des opérations faciles et plus courtes, dans leur ensemble, que la division indiquée. Cela a lieu pour certains modules simples, 2, 3, 4, 9, 11, dans le système décimal; mais il s'en faut que cela soit fréquent. Quoi qu'il en soit, il y avait un grand intérêt théorique à exposer les méthodes précédentes, et c'est surtout cela que nous avons eu en vue.

Quant au nom adopté de *caractère de divisibilité*, il s'emploie surtout quand on a simplement pour but de savoir si un nombre donné est ou n'est pas divisible par le module, et, à ce point de vue, il y a d'autres procédés que les précédents, pour un grand nombre de modules. Nous en parlerons plus tard, quand nous arriverons à de pareils résultats.

* 70. **Caractères de divisibilité dans un système de numération quelconque.** — Nous chercherons, s'il s'agit du module A, les restes obtenus en divisant les unités des divers ordres par A ; chacun des restes se déduit du précédent en le multipliant par la base du système de numération, et en divisant ce produit par A, car chaque unité se déduit de celle d'ordre immédiatement moindre en la multipliant par la base du système de numération. Il est clair que ces diverses opérations ne peuvent pas donner des restes indéfiniment différents les uns des autres, puisque le nombre des restes positifs relatifs au module A est limité ; on finira donc après un certain nombre d'opérations par obtenir de nouveau un reste déjà obtenu, et, à partir de ce moment, les mêmes opérations se reproduiront indéfiniment dans le même ordre, ainsi que les restes auxquels elles conduisent. La suite des restes se compose donc de deux parties : une partie, placée au début, et qui ne se reproduit pas, et une *partie périodique* qui se reproduit indéfiniment ; la première partie peut, d'ailleurs, ne pas exister, et la partie périodique contenir tous les restes différents et commencer dès le début de la suite.

On écrit alors au dessous des divers chiffres d'un nombre quelconque, parcouru de droite à gauche, les restes que l'on a obtenus et dans l'ordre où ils ont été obtenus, et l'on fait le produit de chacun de ces chiffres par le reste placé au-dessous, puis la somme de ces divers produits (n° 68) : il suffit alors de diviser cette somme par A pour avoir le reste que donne le nombre donné, divisé par A.

Exemples : Soit à trouver le reste de la division par 5 du nombre

$$\alpha 96\beta 0578,$$

écrit dans le système duodécimal.

L'unité ordinaire donne pour reste 1 ; l'unité du second ordre

donne le même reste que 12, c'est-à-dire 2; l'unité du troisième ordre donne le même reste que $2 \times 12 = 24$, c'est-à-dire 4 ; l'unité du quatrième ordre donne le même reste que $4 \times 12 = 48$, c'est-à-dire 3 ; l'unité du cinquième ordre donne le même reste que $3 \times 12 = 36$, c'est-à-dire 1. A partir de ce moment, les restes 1, 2, 4, 3 se reproduisent indéfiniment et dans le même ordre. Si nous remplaçons les restes 4, 3 par les restes négatif complémentaires à 5, -1, et -2, nous avons la suite des restes

$$1,\ 2,\ -1,\ -2,\ 1,\ 2,\ -1,\ -2\ldots\ldots,$$

qui est périodique et dont la période se compose des quatre restes $1, 2, -1, -2$

Écrivons maintenant ces divers restes au-dessous des chiffres du nombre donné, en commençant par la droite (voir n° 68) :

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha & 9 & 6 & \beta & 0 & 5 & 7 & 8 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \end{array};$$

rappelons-nous que $\alpha = 10$, $\beta = 11$, formons le produit de chacun des restes par le chiffre placé au-dessus de lui, et la somme algébrique de tous ces produits ; nous aurons

$$8 + 14 - 5 + 11 + 12 - 9 - 20 = 11.$$

Le reste relatif à 5 est donc 1.

Cherchons encore le reste de la division par 16 de ce même nombre. Les divers restes que donnent les unités des divers ordres divisés par 16 sont 1, 12, 0, 0, 0,....., ou 1, -4, 0,0,..... Le reste est donc le même que celui de la somme $8 - 28 = -20$. c'est-à-dire -4, ou 12.

Remarque. — Plus tard, nous trouverons, dans certains cas, des caractères de divisibilité plus simples que ceux-ci ; nous les indiquerons à ce moment.

EXERCICES

1° Montrer qu'on a le reste d'un nombre relatif au module 4, en multipliant par 2 le chiffre des dizaines, l'ajoutant au chiffre des unités, puis divisant cette somme par 4.

2° Le reste d'un nombre relatif au module 8 s'obtient en multipliant respectivement les chiffres des unités, des dizaines, des centaines par 1, 2, 4, formant la somme de ces produits et divisant cette somme par 8.

3° Caractères de divisibilité par 14, par 18.

4° Caractères de divisibilité par 19, par 21.

5° Caractère de divisibilité par 73. Montrer qu'on obtient le reste d'un nombre relatif au module 73, en le partageant en tranches de 4 chiffres, à partir de la droite, en prenant la différence entre la somme des tranches de rangs impairs et celle des tranches de rangs pairs, puis divisant cette différence par 73.

6° Dans les systèmes de base 4, 7, 13, etc., les caractères de divisibilité par 3 sont les mêmes que dans le système décimal.

7° Les caractères de divisibilité par 4 dans le système de base 5, par 5 dans le système de base 6, etc., sont les mêmes que le caractère de divisibilité par 9 dans le système décimal.

8° Trouver les caractères de divisibilité par 3, 5, 7, 11, dans le système binaire.

9° Trouver les caractères de divisibilité par 8, 7, 13, dans le système duodécimal.

10° Caractère de divisibilité par 13 dans le système de base 1000.

11° Caractère de divisibilité par 37 dans le système de base 1000.

12° Caractère de divisibilité par 23 dans le système de base 21.

13° Caractère de divisibilité par 73 dans le système de base 10000.

Énoncer chacun de ces caractères de divisibilité en supposant le nombre donné exactement divisible par le module.

LIVRE II

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES

CHAPITRE PREMIER

NOMBRES PREMIERS

71. On appelle *nombre premier* tout nombre qui n'est divisible que par lui-même et par le nombre un.

Exemples : 1, 2, 3, 5, 7, 11, ...

Il résulte de cette définition qu'un nombre premier ne peut avoir avec un autre nombre d'autre diviseur commun que lui-même et le nombre un.

Deux nombres qui n'ont pas d'autre diviseur commun que un, sont dits *premiers entre eux* ou *premiers l'un avec l'autre.*

Un nombre premier qui ne divise pas un autre nombre est donc premier avec lui. *Ex :* 7 et 10 sont premiers entre eux, car le nombre premier 7 ne divise pas 10.

Sauf 2, qui est évidemment un nombre premier, il n'y a pas de nombre premier parmi les nombres pairs, puisque tous ces nombres ont un diviseur, 2, plus petit qu'eux et autre que 1.

Or, tous les nombres impairs sont compris dans la forme $2k+1$, k étant un nombre entier quelconque ; tous les nombres premiers, sauf 2, sont donc de la forme $2k+1$, le nombre entier k pouvant être nul.

Par rapport au module 4 (voir n° 49), tous les nombres

entiers sont compris dans les formes $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$, k étant un nombre entier quelconque, qui peut être nul. Les nombres de la forme $4k$ sont tous divisibles par 4, aucun d'eux n'est premier ; les nombres de la forme $4k+2$ sont divisibles par 2, il n'y a que 2 parmi eux qui soit premier. Donc les nombres premiers, sauf 2, sont compris dans les formes $4k+1$ et $4k+3$.

Or $4k+3$ peut s'écrire $4(k+1)-1$; on peut donc dire que tous les nombres premiers impairs sont compris dans les formes $4k+1$ et $4k-1$.

On verrait de même que les nombres premiers impairs sont tous compris dans les formes $8k+1$, $8k+3$, $8k+5$ et $8k+7$.

72. **Propositions sur les nombres premiers.**

1° *Un nombre premier ne peut pas diviser un produit de deux facteurs tous deux plus petits que lui.*

Soient p un nombre premier, a et b, deux nombres plus petits que lui. Le produit ab est certainement compris dans l'ensemble

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots\ldots,(p-1)a\,;$$

or le premier de ces nombres, étant plus petit que p, n'est pas divisible par p ; si donc il y a dans cette suite un premier nombre divisible par p, il est précédé de nombres non divisibles par p. Supposons que cela soit, et désignons par ab ce premier multiple de p ; divisons p par b ; nous aurons

$$p = mb + b' \qquad (b' < b),$$

et, en multipliant les deux membres de cette égalité par a, nous aurons

$$ap = mab + ab'.$$

Or, d'après notre hypothèse, ab est un multiple de p ; donc les deux nombres ap et mab sont divisibles par p ; par conséquent leur différence ab' est aussi divisible par

p. Mais, puisque b' est plus petit que b, le nombre ab' vient avant ab dans l'ensemble des multiples de a que nous avons considérés, et il est contraire à notre hypothèse qu'il y ait dans cet ensemble un multiple de p avant le nombre ab. Ceci pourrait être si ab' était nul, mais il est visible que b' n'est pas nul, puisque p n'est pas divisible par b. Il n'y a donc pas, dans l'ensemble considéré, de nombre divisible par p.

Exemple : Les nombres de la table de Pythagore sont les produits des nombres inférieurs à 10, pris deux à deux. Aucun d'eux n'est divisible par 11, ainsi qu'il est facile de s'en assurer.

2° *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre premier divise un produit de deux facteurs, est qu'il divise l'un d'eux.*

En effet, soient A, B deux nombres entiers quelconques; divisons ces deux nombres par un nombre premier donné p; nous aurons

$$A = mp + a, \qquad (a < p)$$
$$B = np + b. \qquad (b < p).$$

Si nous multiplions ces égalités membre à membre, et si nous nous rappelons que pour former le produit de deux sommes, il faut multiplier chaque partie de l'une par chacune des parties de l'autre et ajouter, nous déduirons de là la nouvelle égalité :

$$AB = mnp^2 + mbp + nap + ab.$$

Or les trois premiers termes du second membre sont des nombres entiers divisibles par p, leur somme est un multiple de p, et le reste de AB relatif au module p, est le même que le reste de ab. D'autre part, a et b étant tous deux plus petits que p, leur produit ne peut être divisible par p que si l'un des deux est nul, c'est-à-dire si l'un des nombres A et B est divisible par p.

Exemples : Le produit $3 \times 22 = 66$ est divisible par 11 ; le facteur 22 est aussi divisible par 11.

$3 \times 15 = 45$ n'est pas divisible par 11 ; aucun des deux facteurs n'est divisible par 11.

3° *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un produit de plusieurs facteurs soit divisible par un nombre premier est que l'un de ces facteurs soit divisible par le nombre premier considéré.*

Soient A, B, ..., L un certain nombre de facteurs d'un produit :

$$N = AB.....L,$$

et p un nombre premier qui divise le nombre N. Nous pouvons, dans le produit considéré, effectuer le produit de tous les facteurs, sauf A ; nous aurons alors un produit de deux facteurs A(BC.....L) qui est divisible par p, d'après l'hypothèse faite. Pour qu'il en soit ainsi, le théorème précédent nous apprend qu'il est nécessaire et suffisant que l'un de ces facteurs soit divisible par p ; si c'est le facteur A, le théorème actuel est démontré ; si c'est le second facteur, nous isolerons dans celui-ci le facteur B, et nous aurons à nouveau un produit de deux facteurs, B et CD.....L, divisible par p. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que l'un des deux facteurs soit divisible par p ; si c'est B, le théorème actuel est démontré ; sinon c'est le facteur CD.....L. Nous décomposerons de même celui-ci, en mettant à part le facteur C, et ainsi de suite ; nous arriverons ainsi nécessairement à trouver parmi les facteurs donnés un nombre divisible par p.

Conséquence. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre premier divise un produit de facteurs premiers est qu'il soit compris parmi eux.*

En effet, d'après le théorème précédent, pour que le produit de facteurs premiers soit divisible par un nombre pre-

mier p, il faut et il suffit que ce nombre divise l'un des facteurs. Mais un nombre premier p ne peut diviser un autre nombre premier que si les deux nombres sont égaux, car le second nombre n'a d'autre diviseur, différent de 1, que lui-même.

73. **Nombres composés.** — On appelle *nombres composés* les nombres qui ne sont pas premiers ; c'est-à-dire les nombres qui admettent des diviseurs plus petits qu'eux et autres que un.

La raison de cette dénomination découle immédiatement du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Tout nombre non premier est décomposable en un produit de facteurs premiers.*

En effet, dire qu'un nombre A n'est pas premier, c'est dire qu'il est divisible par un nombre a plus petit que lui et autre que 1 ; on a donc $A = ab$, a et b étant tous deux différents de l'unité et moindres que le nombre A. Si les deux nombres a et b ne sont pas tous deux premiers, ils peuvent être remplacés par des produits de deux facteurs, comme cela vient d'être constaté pour le nombre A ; on aura donc $A = cdef$, si aucun des nombres a et b n'est premier, et $A = cdb$, si b, par exemple, est premier, chacun des nouveaux facteurs étant différent de 1 et moindre que le facteur dont il découle ; et ainsi de suite. On continuera cette opération, tant que tous les facteurs obtenus ne seront pas premiers, et cela arrivera nécessairement ; car si cela n'arrivait jamais, on pourrait prendre pour le nombre A un produit d'un nombre indéfiniment croissant de facteurs tous supérieurs à 1 ; ceci est évidemment absurde, puisqu'un pareil produit finit par être supérieur à n'importe quel nombre. On peut arriver autrement à ce résultat en disant que si l'on n'obtenait jamais des facteurs tous premiers, on aurait, en partant de A, au moins

une suite illimitée de nombres entiers décroissants et supérieurs à 1 ; cette suite serait formée par des facteurs successifs, tels que chacun divise les précédents, et obtenus de la façon indiquée. Cela ne peut pas être.

Théorème. — *La décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers est unique : deux procédés de calcul différents ne peuvent pas conduire à des résultats distincts.*

Supposons, en effet, qu'une première méthode de calcul ait donné pour un nombre entier A la décomposition marquée par l'égalité

$$A = a_1 a_2 \ldots\ldots a_n,$$

et qu'un second procédé ait donné la décomposition

$$A = b_1 b_2 \ldots\ldots b_k ;$$

en écrivant ainsi ces deux décompositions, nous ne supposons pas que les facteurs premiers qui y figurent soient tous distincts : il peut se faire que certains d'entre eux soient répétés plusieurs fois.

Nous avons alors l'égalité

$$a_1 a_2 \ldots\ldots a_n = b_1 b_2 \ldots\ldots b_k.$$

Il est facile de montrer que les facteurs b sont identiques aux facteurs a et en même nombre qu'eux ; en effet, prenons le facteur b_1 du second produit, il doit diviser le premier produit ; par conséquent, il est égal (n° 72, 3°) à l'un des facteurs premiers de ce produit, par exemple, à a_1 ; si nous supprimons maintenant, dans les deux produits, le facteur premier commun a_1, les deux quotients obtenus seront égaux, et nous aurons

$$a_2 a_3 \ldots\ldots a_n = b_2 b_3 \ldots\ldots b_k.$$

Nous démontrerons de même que $b_2 = a_2$, par exemple ; nous supprimerons, dans les deux produits, le facteur commun a_2, et nous continuerons ainsi jusqu'à ce que tous les facteurs premiers ayant été reconnus égaux dans les deux

membres, il reste $1 = 1$. Le théorème est donc parfaitement établi.

Remarque. — Lorsque le même nombre premier figure plusieurs fois dans une décomposition, on ne l'écrit qu'une fois, et on se sert de la notation de l'exposant : on donne à ce facteur pour exposant le nombre qui indique combien de fois il figure dans le produit. En agissant ainsi, et en désignant par $a, b, \ldots, l$ des facteurs premiers différents, tout nombre entier pourra se mettre sous la forme

$$A = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots l^{\lambda},$$

$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant certains nombres entiers.

Une pareille décomposition est caractéristique d'un nombre A, d'après ce que nous venons de voir : tout autre nombre entier donne une décomposition différente.

Les nombres premiers sont donc les éléments constitutifs des nombres. Mais, à ce point de vue, le nombre premier 1 doit être mis à part, car il est à volonté facteur de tout nombre entier autant de fois que l'on veut, et peut être négligé dans l'énumération des facteurs premiers d'un nombre donné.

Exemples : $12 = 2^2 3$; $108 = 2^2 3^3$; $180 = 2^2 3^2 5$.

74. Nombres premiers plus petits qu'un nombre donné. — On voit maintenant l'importance qu'il y aurait à connaître tous les nombres premiers. Nous allons montrer que cela est impossible, car la suite des nombres premiers est illimitée. On ne connaît même pas de loi qui permette de former successivement tous les nombres premiers. Bien mieux, on ne connaît pas de procédé de calcul, qui, appliqué à des nombres entiers, ne donne que des nombres premiers.

Théorème. — *Il n'y a pas de nombre premier supérieur à tous les autres.*

Supposons, en effet, qu'il existe un pareil nombre pre-

mier p ; la suite des nombres premiers ne comprendrait alors pas de nombre supérieur à p et serait limitée : ce serait la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\ldots,\ p.$$

Si nous considérons alors le nombre formé par le produit de tous ceux-ci, augmenté de 1,

$$A = 1.2.3.5.7\ldots\ldots p + 1,$$

ce nombre nous révèle l'existence d'un nombre premier supérieur à p ; car il n'est divisible par aucun des nombres premiers considérés, sauf 1, puisque chacun d'eux divise la première partie et ne divise pas la seconde. Le nombre A est donc premier ou admet des facteurs premiers, et ceux-ci sont plus grands que p, d'après ce qu'on vient de voir ; dans les deux cas, on voit qu'il existe au moins un nombre premier supérieur à p.

Il résulte de ce théorème que les seules questions que l'on puisse se poser, au point de vue où nous nous sommes placé, sont les suivantes : trouver tous les nombres premiers non supérieurs à un nombre donné, ou trouver une loi qui permette de former successivement tous les nombres premiers.

La seconde question n'a pas encore reçu de réponse. Quant à la première, elle est facile à résoudre bien que, dans la pratique, elle puisse donner naissance à de longues opérations.

Trouver les nombres premiers inférieurs à un nombre donné, 100, *par exemple.*

Pour résoudre cette question, nous écrirons, sur un certain nombre de lignes horizontales, les cent premiers nombres.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Nous barrerons dans ce tableau les nombres divisibles par 2, par 3, par 4, etc.; les nombres qui resteront seront les nombres premiers cherchés.

Demandons-nous comment on pourra barrer les nombres divisibles par 7, par exemple. A cet effet, il faudra partir de 7, ajouter 7 unités à ce nombre, ce qui se fera en comptant un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, sur les nombres qui viennent immédiatement après, et barrer le nombre ainsi obtenu; on partira de ce nouveau nombre, auquel on ajoutera 7 unités de la même manière et on barrera le nombre qu'on obtient ainsi; on continuera de cette manière jusqu'à ce que l'on sorte des limites du tableau.

Il est facile d'apporter des simplifications à ces opérations : il suffit de faire les quelques remarques qui suivent.

1° On commencera les opérations indiquées par les plus petits nombres du tableau 2, 3, 4, 5, ...; si l'on arrive à un nombre non barré, 5, par exemple, dont on ait à supprimer les multiples, ce nombre est premier, car il n'est multiple d'aucun nombre plus petit que lui, autre que un.

2° Si l'on rencontre un nombre barré, 4, par exemple, c'est qu'il est multiple d'un nombre inférieur, et il n'y a plus à supprimer ses multiples; ils le sont déjà, comme multiples du nombre plus petit.

3° Quand on aura barré les multiples de 7, le premier nombre non barré, venant après 7, sera 11. Il n'y aura pas lieu d'aller plus loin et de considérer ce nombre, car 11×11 ou 121 est un nombre supérieur à 100, et tout nombre inférieur à 100, divisible par 11, donne un quotient

plus petit que 11, c'est-à-dire est multiple d'un nombre inférieur à 11, et, comme tel, a été barré. Cette remarque s'applique *a fortiori* à tous les nombres non barrés supérieurs à 11.

En définitive, il n'y a donc à barrer, par le procédé indiqué, que les multiples de 2, de 3, de 5 et de 7. Les nombres qui restent alors sont les nombres premiers plus petits que 100. Voici le tableau, tel qu'il se présente alors :

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Les nombres qui restent 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, sont les nombres premiers plus petits que 100.

L'opération précédente est connue sous le nom de *crible d'Ératosthène*.

Cette méthode est extrêmement longue, quand on se fixe une limite élevée. Elle a cependant été employée pour construire des tables de nombres premiers très étendues. La plus importante est celle de Burckhardt : elle s'étend à tous les nombres premiers inférieurs à 3.036.000.

75. **Reconnaître si un nombre donné est ou n'est pas premier.** — La méthode est très simple et il suffit de l'exposer sur un exemple.

Proposons-nous de chercher si le nombre 641 est premier

ou non. Il nous suffit de remarquer que le nombre 641 est inférieur au carré de 30, $641 < 900$; nous pouvons alors en conclure que si ce nombre admettait un diviseur premier supérieur à 30, il aurait nécessairement un diviseur inférieur à 30, le quotient de 641 par le diviseur supposé. Il n'y a donc qu'à chercher s'il y a parmi les nombres premiers inférieurs à 30, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, des diviseurs de 641, ou bien s'il n'y en a aucun.

Il est visible d'abord que 2, 3, 5, 7, 11 ne sont pas diviseurs de 641; les nombres 13, 17, 19, 23, 29 conduisent aux divisions suivantes :

$$\begin{array}{r|l} 641 & 13 \\ \hline 121 & 49 \\ 4 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 641 & 17 \\ \hline 131 & 37 \\ 12 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 641 & 19 \\ \hline 71 & 33 \\ 14 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 641 & 23 \\ \hline 181 & 27 \\ 20 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 641 & 29 \\ \hline 61 & 22 \\ 3 & \end{array};$$

aucune d'elles ne réussit; donc 641 est un nombre premier.

Remarque I. — Nous eussions pu ne pas faire la dernière division, car la division précédente nous montre que le quotient de 641 par 27 est 23 et le reste 20; donc tout nombre supérieur à 27 ne peut donner qu'un quotient, au plus égal à 23, et, par suite, le quotient de 641 par 29 sera inférieur à 29, et ne pourra être exact, sans quoi on eût trouvé déjà pour 641 un diviseur inférieur à 29.

Dans la pratique, on essaie successivement les divers nombres premiers, dans l'ordre où ils se présentent naturellement, et l'on s'arrête dès que l'une des divisions se fait exactement, ou bien dès que le quotient est inférieur au diviseur employé. Dans le premier cas, le nombre donné est un nombre composé; dans le second, c'est un nombre premier. On reconnaît de suite, à l'aide des caractères de divisibilité, si les nombres 2, 3, 5, 7, 11 sont ou ne sont pas diviseurs; et les essais véritables ne commencent qu'à partir de 13.

Exemples : Pour le nombre 1459, les essais s'arrêtent au nombre 41; il suffit même d'aller jusqu'à 37, car on a

$$1459 = 37 \times 39 + 16,$$

et, d'après une remarque déjà faite, tout nombre supérieur à 39 donne un quotient inférieur ou égal à 37, c'est-à-dire plus petit que lui.

Pour 2921, les essais s'arrêtent à 23, qui est un diviseur de 2921. Ce nombre est donc un nombre composé et l'on a

$$2921 = 23 \times 127;$$

23 et 127 sont les facteurs premiers de 2921.

Remarque II. — Cette méthode s'applique sans difficulté aux petits nombres, par exemple aux nombres inférieurs à 10000; mais quand le nombre est grand, elle est excessivement longue et peu commode. Elle exige d'ailleurs que l'on possède une table de nombres premiers assez étendue.

Il y a d'autres procédés, mais nous ne pouvons en parler ici (*Recherches arithmétiques* de Gauss, section sixième).

Remarque III. — On pourrait penser que les nombres $N = 1.2.3.5.7.\ldots\ldots p + 1$ du n° 74 sont des nombres premiers; les premiers d'entre eux, en effet, sont premiers, car on a

$$\begin{aligned} 1.2 + 1 &= 3, \\ 1.2.3 + 1 &= 7, \\ 1.2.3\ 5 + 1 &= 31, \\ 1.2.3.5.7 + 1 &= 211, \\ 1.2.3.5.7.11 + 1 &= 2311, \end{aligned}$$

et tous ces nombres sont premiers; mais le nombre $1.2.3.5.7.11.13 + 1 = 30031$ est le produit des deux facteurs premiers 59 et 509.

Fermat avait annoncé que tous les nombres compris dans la forme $2^{2^x} + 1$, où x désigne un nombre entier, sont des nombres premiers; mais Euler a montré que le nombre qu'on obtient pour $x = 5$, $2^{32} + 1$, est un nombre composé; ce nombre est 4294967297 et est divisible par 641. Depuis lors, comme nous l'avons déjà dit, on n'a

découvert aucune forme ne contenant que des nombres premiers.

* 76. **Restes des puissances d'un nombre, relatifs à un module premier donné.** — Théorème. — *La suite des restes relatifs à un module premier* p *des diverses puissances d'un nombre* a *non divisible par* p *est une suite périodique, qui ne contient aucune partie non périodique.* — La suite des puissances de a est

$$1,\ a,\ a^2,\ldots\ldots,\ a^n,\ldots.$$

Il n'y a dans cette suite aucun nombre divisible par p, car chacun d'eux est le produit d'un certain nombre de facteurs a, et de tous ces facteurs aucun n'est divisible par p (n° 72, 3°) ; d'autre part, le nombre des restes relatifs au module p est limité ; il y a donc forcément des puissances de a qui donnent le même reste ; soient a^n et a^m deux puissances de a qui donnent le même reste, et désignons par a^m celle qui vient après l'autre, de sorte que $m > n$. Alors la différence $a^m - a^n$ est divisible par p ; mais elle peut s'écrire $a^n(a^{m-n} - 1)$, car $a^m = a^n.a^{m-n}$ (n° 42). Or le premier facteur, a^n, n'est pas divisible par p ; donc le second est divisible par p ; donc a^{m-n} admet pour reste, par rapport au module p, le nombre 1.

Il y a donc dans la suite des puissances des nombres qui donnent pour reste 1. Soit a^t le premier d'entre eux, la plus petite puissance de a qui donne pour reste 1. On a $a^t = \text{mult}\, p + 1$, et, en multipliant les deux premiers membres de cette égalité par $a, a^2, a^3, \ldots\ldots, a^{t-1}$, nous avons successivement $a^{t+1} = \text{mult}\, p + a$, $a^{t+2} = \text{mult}\, p + a^2, \ldots,\ a^{2t-1} = \text{mult}\, p + a^{t-1}$; les t nombres $a^t,\ a^{t+1}, \ldots\ldots, a^{2t-1}$, qui suivent les t premiers, donnent donc les mêmes restes qu'eux ; de même les t nombres $a^{2t},\ a^{2t+1},\ a^{2t+2}, \ldots\ldots,\ a^{3t-1}$, redonnent les mêmes restes ; et ainsi de suite. La suite des restes est donc périodique, et la période commence au premier reste, 1.

Remarque I. — Les t restes fournis par $1,\ a,\ a^2, \ldots,\ a^{t-1}$, sont tous différents, si l'on suppose que a^t est la plus petite des puissances donnant pour reste 1 ; car si deux d'entre elles donnaient le même reste, a^k et a^h, $k > h$, on verrait comme précédemment que a^{k-h} donne pour reste 1, ce qui n'est pas, puisque cette puissance de a vient avant a^t. Cette suite de t restes différents $\alpha = 1,\ \alpha',\ \alpha'', \ldots\ldots, \alpha^{(t-1)}$, constitue donc la période qui se reproduit indéfiniment et sans altération.

Remarque II. — Considérons une puissance quelconque de a, a^q, et supposons d'abord q divisible par t, $q = q't$; nous venons de voir que le reste de $a^{q't}$ commence la $(q'+1)^e$ période ; il est donc égal à 1. On peut voir cela autrement, en écri-

vant $a^t = \text{mult}\, p + 1$; si on multiplie cette égalité par elle-même, membre à membre, on aura $a^{2t} = \text{mult}\, p + 1$; puis, multipliant cette égalité par la précédente, $a^{3t} = \text{mult}\, p + 1$; et ainsi de suite, jusqu'à $a^{q't} = \text{mult}\, p + 1$. Supposons maintenant q non divisible par t, $q = q't + r$, $(r < t)$; nous pouvons écrire $a^{q't} = \text{mult}\, p + 1$, et, en multipliant les deux membres par a^r, $a^{q't+r}$ ou $a^q = \text{mult}\, p + a^r$. Donc a^q donne le même reste que a^r, et, pour calculer le reste relatif à une puissance, il faut remplacer l'exposant par son reste relatif au module t.

Exemple : 3^3 donne pour reste 1, par rapport au module 13 ; donc 3^{1000} peut être remplacé par 3 et donne pour reste 3 ; 3^{1001} peut être remplacé par 3^2 et donne pour reste 9 ou -4.

Remarque III. — Le calcul des restes successifs se fait en multipliant, à chaque fois, le reste que l'on vient de trouver par a, et prenant le reste de ce produit ; on part de 1, et on continue jusqu'à ce que l'on retrouve 1. C'est ainsi qu'a été formé le tableau suivant, qui contient les restes des puissances de 10, par rapport aux modules premiers inférieurs à 50, autres que 2 et 5.

Périodes des restes des diverses puissances de 10, par rapport aux modules premiers inférieurs à 50.

Modules	Périodes de restes
3	1.
* 7	1, 3, 2, —1, —3, —2.
11	1, —1.
13	1, —3, —4, —1, 3, 4.
* 17	1, —7, —2, —3, 4, 6, —8, 5, —1, 7, 2, 3, —4, —6, 8, —5.
* 19	1, —9, 5, —7, 6, 3, —8, —4, —2, —1, 9, —5, 7, —6, —3, 8, 4, 2.
* 23	1, 10, 8, 11, —5, —4, 6, —9, 2, —3, —7, —1, —10, —8, —11, 5, 4, —6, 9, —2, 3, 7.
* 29	1, 10, 13, 14, —5, 8, —7, —12, —4, —11, 6, 2, —9, —3, —1, —10, —13, —14, 5, —8, 7, 12, 4, 11, —6, —2, 9, 3.
31	1, 10, 7, 8, —13, —6, 2, —11, 14, —15, 5, —12, 4, 9, —3.
37	1, 10, —11.
41	1, 10, 18, 16, —4.
43	1, 10, 14, 11, —19, —18, —8, 6, 17, —2, —20, 15, 21, —5, —7, 16, —12, 9, 4, —3, 13.
* 47	1, 10, 6, 13, —11, —16, —19, —2, —20, —12, 21, 22, —15, —9, 4, —7, —23, 5, 3, —17, 18, —8, 14, —1, —10, —6, —13, 11, 16, 19, 2, 20, 12, —21, —22, 15, 9, —4, 7, 23, —5, —3, 17, —18, 8, —14.

Dans ce tableau, on n'a mis que les restes minimas absolus. On a marqué d'un astérisque les modules pour lesquels la période comprend tous les restes possibles, autres que 0.

Ce tableau contient les caractères de divisibilité par 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, dans le sens qui a été attaché à cette expression antérieurement.

Le théorème qui vient d'être établi est susceptible d'extension, comme nous le verrons plus tard. Pour plus de détails, on pourra consulter les *Recherches arithmétiques* de Gauss (section troisième) ou l'*Algèbre supérieure* de J. Serret (tome II).

* 77. **Exposant auquel appartient un nombre, par rapport à un module premier** p. — Si a^t est la plus petite puissance de a qui donne pour reste 1, on dit que a *appartient à l'exposant* t, par rapport au module premier p.

Le tableau précédent nous montre que, dans tous les cas qui y sont contenus, l'exposant auquel 10 appartient est égal à $p-1$ ou à un diviseur de $p-1$. Nous allons montrer que cette propriété est générale.

Théorème. — *L'exposant auquel appartient un nombre* a, *non divisible par un nombre premier* p, *par rapport à ce module, est égal à* $p-1$ *ou est un diviseur de* $p-1$.

Soient t l'exposant de a et (A) l'ensemble des restes donnés par la suite $1, a, a^2, \ldots\ldots, a^{t-1}$; désignons ces restes par $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots\ldots, \alpha^{(t-1)}$; $\alpha = 1$. Nous avons vu que ces restes sont tous différents; par conséquent leur nombre ne peut dépasser $p-1$. Le nombre t est donc égal à $p-1$ ou inférieur à $p-1$.

Si $t < p-1$, il y a, parmi les $p-1$ premiers nombres entiers, des restes qui ne sont pas dans l'ensemble (A), c'est-à-dire qui ne sont pas des restes de puissances de a; soit β l'un d'eux. Il est facile de montrer que les produits des restes $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots\ldots$, par β conduisent à de nouveaux restes distincts et différents des précédents. Les restes des produits $\beta\alpha, \beta\alpha', \beta\alpha'', \ldots\ldots$ sont différents; car si deux d'entre eux donnaient le même reste, $\beta\alpha^{(h)}$ et $\beta\alpha^{(k)}$, leur différence $\beta\alpha^{(h)} - \beta\alpha^{(k)}$ serait divisible par p; or cette différence est le produit de deux facteurs β et $\alpha^{(h)} - \alpha^{(k)}$ qui sont tous deux inférieurs à p; elle n'est donc pas divisible par p. D'autre part, ces nouveaux restes sont différents des précédents, car si $\beta\alpha^{(h)}$ donnait pour reste $\alpha^{(k)}$, la différence $\beta\alpha^{(h)} - \alpha^{(k)}$ serait divisible par p; or on peut, dans cette différence, remplacer $\alpha^{(h)}$ et $\alpha^{(k)}$ par a^h et a^k, qui ne diffèrent de ceux-ci que par des multiples de p, ou par a^h et a^{k+t}; elle peut alors s'écrire

$$a^{t+k} - a^h\beta$$

ou

$$a^h(a^{t+k-h} - \beta).$$

Pour qu'elle fût divisible par p, il faudrait que β fût le reste de a^{t+h-k}, c'est-à-dire un reste de puissance de a, ce qui n'est pas.

Les nouveaux restes $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ forment donc un nouvel ensemble (B) différent du précédent, et tous les nombres des ensembles (A) et (B) sont distincts ; nous avons donc déjà $2t$ restes relatifs à p. Si nous les avons ainsi tous obtenus, $2t = p - 1$; sinon, soit γ un de ceux qui manquent.

Multiplions tous les nombres de l'ensemble (A) par γ. Nous allons montrer que les restes provenant des produits $\gamma\alpha, \gamma\alpha', \gamma\alpha'', \ldots$ sont tous différents et diffèrent de ceux des ensembles (A) et (B). Nous verrions d'abord, comme précédemment, qu'ils sont distincts et qu'ils diffèrent des restes de l'ensemble (A) ; il nous reste à faire voir qu'ils diffèrent aussi de ceux de l'ensemble (B). Si l'un d'eux se trouvait dans l'ensemble (B), c'est que la différence $\beta\alpha^{(k)} - \gamma\alpha^{(h)}$ serait divisible par p, ou bien la différence $\beta a^{t+k} - \gamma a^h$; mais cette différence est le produit de a^h par $\beta a^{t+k-h} - \gamma$, et le premier facteur n'est pas divisible par p ; le second serait donc divisible par p, et γ serait un reste du second ensemble, ce qui n'est pas.

Si tous les restes sont alors obtenus, on a $3t = p - 1$; sinon, soit δ l'un de ceux qui n'ont pas encore été obtenus ; nous considérerons de même les produits $\delta\alpha, \delta\alpha', \delta\alpha'', \ldots$ Et ainsi de suite. Nous arriverons ainsi à trouver tous les restes relatifs au module p, et nous voyons qu'on a forcément $nt = p - 1$; donc $p - 1$ est divisible par t.

Exemples : Les restes des puissances de 2, par rapport au module 13, sont

$$1, 2, 4, -5, 3, 6, -1, -2, -4, 5, -3, -6 ;$$

on a donc ici $t = 12 = p - 1$.

Les restes des puissances de 3 sont $1, 3, -4$; on a donc ici $t = 3 = \frac{12}{4}$.

Lorsque a appartient à l'exposant $p - 1$, on le nomme *racine primitive de* p : 10 est racine primitive de 7, de 17, de 19, de 23, etc.; 2 est racine primitive de 13.

Nous verrons plus tard qu'il y a toujours des nombres appartenant aux diviseurs de $p - 1$, et, par suite, qu'il y a toujours des racines primitives relatives à un module premier quelconque.

* 78. **Théorème de Fermat.** — *Si* p *désigne un nombre premier et* a *un nombre non divisible par* p, *la différence* $a^{p-1} - 1$ *est toujours divisible par* p. — En effet, désignons par t l'exposant auquel a appartient ; nous avons vu que t est un diviseur de $p - 1$ ou $p - 1$ lui-même, et que $a^t = \text{mult}\, p + 1$. Le

nombre $\frac{p-1}{t}$ est donc un nombre entier, et si nous élevons les deux membres de l'égalité précédente à la puissance $\frac{p-1}{t}$, nous avons : $a^{p-1} = \text{mult}\, p+1$, ce qui démontre le théorème.

Ce théorème, un des plus importants de l'arithmétique, a été énoncé par Fermat, sans démonstration ; il a été démontré pour la première fois par Euler, mais par une méthode différente de celle que nous venons de donner.

EXERCICES

1° Sauf 2 et 3, tous les nombres premiers sont compris dans les formes $6k+1$, $6k-1$, k étant un nombre entier quelconque, ou dans les formes $12k+1$, $12k+5$, $12k+7$, $12k+11$.

2° Pour qu'un nombre soit divisible par le produit de deux nombres premiers, il faut et il suffit qu'il soit divisible par chacun d'eux. En conclure le caractère de divisibilité par 33.

3° Un nombre inférieur à 100 contient au plus 6 facteurs premiers, distincts ou non.

4° Montrer que le nombre 2^3+2^2+2+1 n'est pas premier.

5° Tout nombre premier impair est la différence entre les carrés de deux nombres consécutifs.

6° Les nombres premiers de la forme $4k-1$ ne peuvent être des sommes de deux carrés. Vérifier que tous ceux de la forme $4k+1$ qui sont plus petits que 100 sont des sommes de deux carrés.

7° Former la table des nombres premiers compris entre 100 et 200.

8° Chercher si le nombre $2^{11}-1$ est ou n'est pas premier.

9° Former les restes des puissances de 2, relatifs aux modules 13, 17, 73 ; former les restes des puissances des nombres inférieurs à 17 par rapport au module 17.

10° Montrer que les restes des puissances $1, a, a^2, \ldots, a^{t-1}$ appartiennent à l'exposant t ou à un exposant inférieur, en admettant que a appartienne à l'exposant t.

CHAPITRE II

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

79. **Plus grand commun diviseur entre deux nombres.** — Un diviseur commun à deux nombres est un nombre qui les divise tous deux exactement. Le *plus grand commun diviseur* de deux nombres est le plus grand de leurs diviseurs communs.

Si deux nombres ont pour plus grand commun diviseur l'unité, ils sont premiers entre eux.

La recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres repose sur le théorème suivant :

Les diviseurs communs à deux nombres sont exactement les mêmes que ceux qui sont communs au plus petit des deux nombres et au reste de leur division.

En effet, si nous désignons par a et b les deux nombres, et par a le plus grand des deux nombres, la division de a par b nous conduit à l'égalité

$$a = bq + r, \qquad (r < b),$$

q et r désignant le quotient et le reste.

Cela posé, tout diviseur commun à a et b, divise aussi bq ; il divise donc la différence $a - bq$, c'est-à-dire r ; c'est donc un diviseur commun à b et r. Réciproquement, tout diviseur commun à b et r, divise bq, et, par suite, la somme $bq + r$, c'est-à-dire a ; c'est donc un diviseur commun à a et b. Les deux couples (a, b) et (b, r) sont donc complètement équivalents, au point de vue des diviseurs communs.

Considérons alors deux nombres quelconques, sur lesquels nous ne ferons aucune hypothèse particulière, par exemple, 80712 et 8712. Divisons 80712 par 8712 ; le quotient est 9 et le reste 2304 ; nous pouvons donc, d'après ce qui précède, au point de vue des diviseurs communs, remplacer le couple 80712 et 8712 par le couple plus simple 8712 et 2304. Divisons de même 8712 par 2304 ; nous aurons 3 pour quotient et 1800 pour reste, et nous pourrons remplacer le couple 8712 et 2304 par le couple plus simple 2304 et 1800. Et ainsi de suite.

La suite de ces divisions se termine nécessairement ; car les restes successifs vont en décroissant, de telle sorte qu'on arrive nécessairement soit à un reste nul, c'est-à-dire à une division exacte, soit à un reste égal à 1, et alors comme il divise exactement le précédent, quel qu'il soit, la division suivante se fait exactement. Dans tous les cas, on a donc une suite limitée de divisions terminée par une division exacte.

Dans le cas actuel, il y a 7 divisions en tout, la dernière se faisant exactement ; c'est la division de 216 par 72. Il ressort des raisonnements précédents que les deux nombres donnés, d'une part, le plus petit de ces deux nombres et le premier reste, d'autre part, et deux restes consécutifs quelconques forment des couples équivalents, au point de vue des diviseurs communs. Donc les deux nombres 80712 et 8712 ont les mêmes diviseurs que 216 et 72. Or 216 est un multiple de 72 ; donc les diviseurs de 72 appartiennent tous à 216 ; par conséquent les diviseurs communs à 216 et à 72 sont les diviseurs de 72 ; le plus grand d'entre eux est 72 ; donc 72 est le plus grand commun diviseur entre 80712 et 8712.

De tout ce qui vient d'être dit, résultent la règle et le théorème suivants :

Règle. — *Pour trouver le plus grand commun diviseur de*

deux nombres donnés, on divise le plus grand par le plus petit, celui-ci par le premier reste ainsi obtenu, puis le premier reste par le second ; et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à une division exacte. Le dernier reste obtenu est le plus grand commun diviseur cherché.

THÉORÈME. — *Les diviseurs communs à deux nombres sont les diviseurs du plus grand commun diviseur.*

Les mêmes conclusions s'appliquent à chacun des couples formés par le plus petit nombre et le premier reste ou par deux restes consécutifs.

Si nous désignons par a et b les deux nombres donnés, $a > b$, par $r_1, r_2, \ldots, r_k$ les restes successifs, les diverses divisions signalées donnent naissance aux égalités suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1 & (r_1 < b) \\ b = r_1q_2 + r_2 & (r_2 < r_1) \\ r_1 = r_2q_3 + r_3 & (r_3 < r_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k & (r_k < r_{k-1}) \\ r_{k-1} = r_kq_{k+1}. & \end{array}\right.$$

La suite, a, b, r_1, r_2, ..., r_k est décroissante. Tous les couples (a, b), (b, r_1) ,..., (r_{k-1}, r_k) ont les mêmes diviseurs communs ; r_k est le plus grand commun diviseur de chacun d'eux, et les diviseurs communs à tous ces couples sont les diviseurs de r_k.

Les égalités (1) constituent l'algorithme du plus grand commun diviseur. — On appelle *algorithme* une opération composée ou un ensemble d'opérations simples conduisant à un résultat déterminé.

Pour effectuer les opérations qui conduisent au plus grand commun diviseur, on réunit toutes les divisions en une seule opération complexe ; pour cela, on écrit, à chaque fois, le quotient à la place du diviseur et réciproquement,

de telle sorte que les divisions soient placées les unes à la suite des autres, sans interruption. Nous donnons ici les opérations qui conduisent au plus grand commun diviseur de 80712 et 8712 et au plus grand commun diviseur de 81833 et 9125.

	9	3	1	3	1	1	3
80712	8712	2304	1800	504	288	216	72
2304	1800	504	288	216	72	00	

	8	1	3	4
81833	9125	8833	292	73
8833	292	73	00	

Remarque I. — Les diviseurs communs à a et b sont les mêmes que ceux qui sont communs à a et $a+b$, a et $a-b$, b et $a+b$, b et $a-b$. On peut donc, dans le couple r_p, r_{p-1}, remplacer le reste r_p par son complément à r_{p-1}, c'est-à-dire par le nombre $r_{p-1} - r_p$. Ceci est avantageux quand le nouveau nombre est inférieur à r_p, ce qui arrive toutes les fois que le reste r_p est plus grand que la moitié de r_{p-1} (nous appelons moitié d'un nombre le quotient par 2 de ce nombre à une unité près).

Si le dernier reste r_k est égal à 1, les deux nombres a et b n'ont pas de diviseur commun : ils sont donc premiers entre eux, et l'on voit que l'algorithme du plus grand commun diviseur permet de savoir si deux nombres sont ou ne sont pas premiers entre eux.

Remarque II. — *Limite supérieure du nombre des divisions à effectuer dans la recherche du plus grand commun diviseur*. — Il n'y a qu'à consulter la suite des égalités (1), pour voir qu'à chacun des nombres de l'ensemble

$$b, r_1, r_2, \ldots\ldots, r_k$$

correspond une division, si l'on compte toutefois la dernière division qui se fait exactement. Parcourons cette suite en ordre inverse, nous obtiendrons

$$r_k, r_{k-1}, \ldots\ldots, r_1, b;$$

remarquons en outre qu'entre trois nombres consécutifs nous avons la relation

$$r_{p-2} = r_{p-1}q_p + r_p,$$

dans laquelle q_p est au moins égal à 1 ; nous en conclurons de suite

$$r_{p-2} \geqslant r_{p-1} + r_p.$$

D'autre part, le premier reste r_k est au moins égal à 1, le second r_{k-1} au moins égal à 2 ; si donc nous formons une suite qui commence par les nombres 1 et 2, et dont chaque terme soit la somme des deux précédents,

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots\ldots,$$

les nombres de cette suite ne seront pas supérieurs à ceux qui leur correspondent dans l'ensemble

$$r_k, r_{k-1}, \ldots\ldots, r_1, b.$$

Il en résulte donc que si l'on parcourt la suite des nombres ainsi obtenus jusqu'à ce que l'on arrive à un terme supérieur à b, on n'aura pas moins rencontré de nombres qu'il y en a dans l'ensemble $r_k, r_{k-1}, \ldots\ldots, b$. Le rang du dernier nombre envisagé est donc au moins égal au nombre des divisions à effectuer, et constitue une limite supérieure du nombre des opérations.

Si on cherche le plus grand commun diviseur entre deux termes consécutifs de cette suite, on a juste autant de divisions à effectuer qu'il y en a d'indiquées.

Nous donnons ici cette suite pour tous les nombres qu'elle renferme et qui sont inférieurs à 10.000 :

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765.

Si donc le plus petit des deux nombres employés est inférieur à 10000, il y a au plus 19 opérations à effectuer.

Deux nombres consécutifs de cette suite sont premiers entre eux.

On peut trouver autrement une limite supérieure du nombre des opérations : il suffit de remarquer que, d'après la loi de formation des nombres indiquée antérieurement, les termes de rangs impairs sont supérieurs aux diverses puissances de 2,

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \ldots\ldots,$$

car chacun d'eux est la somme du nombre antéprécédent dans la suite complète et d'un nombre plus grand que lui ; il dépasse donc le double de celui qui le précède dans les rangs impairs. Nous chercherons alors un nombre n tel que $2^n \geqslant b$, et le nombre $2n$ ou même $2n-1$ est une limite supérieure du nombre des divisions. Mais cette limite est en général plus élevée que la précédente : si nous prenons pour exemple le cas où le plus petit nombre est égal à 6500, la première règle donne 19, ou même 18, pour nombre maximum des opérations, tandis que la seconde règle donne 27.

80. **Théorèmes relatifs au plus grand commun diviseur.**

1° *Si on multiplie deux nombres par un troisième, leur plus grand commun diviseur est multiplié par ce troisième.*

En effet, nous avons vu, au n° 55, 6°, que si l'on multiplie deux nombres a et b par c, le reste de leur division est multiplié par c ; les deux nombres b et r_1, étant multipliés par c, le reste de leur division est aussi multiplié par c ; et ainsi de suite, jusqu'au dernier reste, qui est également multiplié par c. Or celui-ci est le plus grand commun diviseur des deux membres donnés ; donc etc.

Exemple : 15 et 7 ont pour plus grand commun diviseur 1 ; donc leurs produits par 8, 120 et 56, ont pour plus grand commun diviseur 8.

2° *Si on divise deux nombres par un de leurs diviseurs communs, le plus grand commun diviseur est divisé par le nombre employé.*

On sait (n° 55, 7°) que si l'on divise deux nombres, a et b, par un de leurs diviseurs communs, le reste de leur division est divisé par ce nombre; soit c le diviseur employé; b et r_1, étant divisés par c, le reste de leur division est aussi divisé par c; et ainsi de suite, jusqu'au dernier reste, qui est également divisé par c. Or ce dernier reste est le plus grand commun diviseur; donc etc.

Exemple: Les nombres 80712 et 8712 ont pour plus grand commun diviseur 72; si nous divisons ces deux nombres par 12, les quotients, 6726 et 726, ont pour plus grand commun diviseur 6.

Conséquence. — *Les quotients de deux nombres par leur plus grand commun diviseur sont premiers entre eux.*

Car le nouveau plus grand commun diviseur est égal à 1.

Exemple: 80712 et 8712 ont pour plus grand commun diviseur 72; leurs quotients par 72 sont 1121 et 121, et ces deux nombres sont premiers entre eux.

Donc ce qui caractérise le plus grand commun diviseur de deux nombres, parmi tous leurs diviseurs communs, c'est que les quotients qu'il fournit sont premiers entre eux.

81. **Plus grand commun diviseur de plusieurs nombres.** — Considérons plusieurs nombres donnés a, b, c, d, ... On appelle *diviseur commun* de ces nombres, tout nombre qui les divise tous exactement.

Le plus grand de tous les diviseurs communs s'appelle le *plus grand commun diviseur* de ces nombres.

Si plusieurs nombres donnés n'ont pas d'autre diviseur commun que le nombre 1, ils ont 1 pour plus grand commun diviseur, et ils sont dits *premiers dans leur ensemble.*

On dit que plusieurs nombres sont premiers deux à deux,

lorsque tous les couples que l'on peut former avec deux de ces nombres ont pour plus grand commun diviseur l'unité.

THÉORÈME. — *Pour avoir le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, on prend le plus grand commun diviseur de deux d'entre eux, puis e plus grand commun diviseur de celui-ci et d'un troisième nombre de l'ensemble, puis le plus grand commun diviseur du nouveau résultat et d'un quatrième nombre de l'ensemble, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait épuisé tous les nombres de l'ensemble. Le dernier résultat obtenu est le plus grand commun diviseur cherché.*

Considérons, en effet, quatre nombres a, b, c, d, et désignons par δ_1 le plus grand commun diviseur de a et de b, par δ_2 le plus grand commun diviseur de δ_1 et de c et enfin par δ le plus grand commun diviseur de δ_2 et de d. Nous avons vu que les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs de δ_1; nous pouvons donc, au point de vue des diviseurs communs, remplacer a et b par δ_1. Les diviseurs communs à a, b, c sont les diviseurs communs à δ_1 et c, c'est-à-dire les diviseurs de δ_2; nous pouvons donc, au point de vue des diviseurs communs, remplacer a, b, c par δ_2, et, par suite, remplacer l'ensemble a, b, c, d par δ_2 et d; ces deux-ci ont pour diviseurs communs les diviseurs de leur plus grand commun diviseur, δ; donc les diviseurs communs aux quatre nombres a, b, c, d sont les diviseurs de δ; le plus grand d'entre eux est δ lui-même.

Le raisonnement est identiquement le même, quand l'ensemble donné contient trois ou plus de quatre nombres.

Il résulte encore de notre raisonnement que *les diviseurs communs à plusieurs nombres sont les diviseurs de leur plus grand commun diviseur.*

Exemples: 60, 84, 180, 156 ont pour plus grand commun diviseur 12.

5, 7, 15, 13 sont premiers dans leur ensemble.

5, 7, 16, 27 sont premiers deux à deux.

Les propositions suivantes sont presque évidentes.

1° *Lorsqu'on multiplie plusieurs nombres par un nombre quelconque, leur plus grand commun diviseur est multiplié par ce nombre.*

En effet, prenons comme précédemment un ensemble de quatre nombres a, b, c, d, et désignons par δ_1, δ_2, δ les plus grands communs diviseurs de a et b, de δ_1 et c, de δ_2 et d; si nous multiplions tous les nombres par un nombre donné, k, d'après les propriétés du plus grand commun diviseur de deux nombres, δ_1, δ_2 et δ seront aussi multipliés par k, car les deux nombres qui fournissent l'un d'eux ont été multipliés par k.

2° *Lorsqu'on divise plusieurs nombres par un de leurs diviseurs communs, leur plus grand commun diviseur est divisé par ce nombre.*

Démonstration complètement analogue à la précédente.

Il résulte de là que *les quotients de plusieurs nombres par leur plus grand commun diviseur sont premiers dans leur ensemble*; car le nouveau plus grand commun diviseur est égal à 1.

Tandis que *les quotients de plusieurs nombres par un autre diviseur commun admettent encore un diviseur commun autre que l'unité*, le quotient du plus grand commun diviseur par le diviseur employé.

Ce qui caractérise le plus grand commun diviseur parmi tous les diviseurs communs à plusieurs nombres donnés, c'est que les quotients qu'il fournit sont premiers dans leur ensemble.

On peut d'ailleurs démontrer *a priori* que les quotients de plusieurs nombres par leur plus grand commun diviseur sont premiers dans leur ensemble. En effet, soient plusieurs nombres a, b, c, d, dont nous désignons le plus grand commun diviseur par δ; nous aurons

$$a = a'\delta, \qquad b = b'\delta, \qquad c = c'\delta, \qquad d = d'\delta.$$

Si les quotients a', b', c', d' n'étaient pas premiers dans leur ensemble, ils auraient un diviseur commun δ_1, et l'on aurait

$$a' = a''\delta_1, \qquad b' = b''\delta_1, \qquad c' = c''\delta_1, \qquad d' = d''\delta_1,$$

et, par suite,

$$a = a''\delta_1\delta, \qquad b = b''\delta_1\delta, \qquad c = c''\delta_1\delta, \qquad d = d''\delta_1\delta.$$

Les nombres proposés auraient donc pour diviseur commun $\delta_1\delta$, qui est plus grand que δ, ce qui est contraire à l'hypothèse, puisque δ est le plus grand commun diviseur.

82. Théorèmes qui découlent de la théorie du plus grand commun diviseur.

1° *Lorsqu'un nombre divise un produit de deux facteurs et est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.*

Soit c un nombre qui divise le produit ab de deux nombres donnés, et supposons c premier avec b; cela veut dire que c et b ont pour plus grand commun diviseur l'unité : donc les produits ac et ab ont pour plus grand commun diviseur le nombre a. D'autre part, le nombre c divise ac dont il est facteur, il divise ab par hypothèse; donc il divise le plus grand commun diviseur de ces deux nombres, c'est-à-dire a.

2° *Lorsqu'un nombre est premier avec tous les facteurs d'un produit, sauf un, et qu'il divise ce produit, il divise le facteur avec lequel il n'est pas premier.*

En effet, soit un produit $abc....l$, dans lequel tous les facteurs, sauf l, sont premiers avec un nombre donné m, qui, en outre, divise le produit considéré; nous allons montrer que m divise l. Pour cela, nous pouvons dire : m divise le produit de a par $bc .... l$, il est premier avec a, donc il divise $bc....l$; de même m divise le produit de b par $c....l$, il est premier avec b, donc il divise $c .... l$; et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous soyons arrivé à l, qui est donc divisible par m.

3° *Lorsqu'un nombre* m *est premier avec divers nombres* a, b, c, ..., l, *il est premier avec leur produit.*

En effet, tout diviseur δ de m est premier avec chacun des nombres $a, b, c, \ldots, l$, car s'il avait un diviseur commun avec l'un d'eux, b, par exemple, ce diviseur appartenant à m, b et m ne seraient pas premiers entre eux. Il résulte donc du théorème précédent que δ ne peut diviser le produit $a, b, c \ldots l$. Donc ce produit et le nombre m n'ont aucun diviseur commun.

On peut généraliser ce théorème et démontrer que *si deux ensembles de nombres* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *et* $b_1, b_2, \ldots, b_k$, *sont tels que tout nombre du premier ensemble soit premier avec tout nombre du second, les deux produits* $a_1a_2\ldots a_n$ *et* $b_1b_2\ldots b_k$ *sont premiers entre eux.*

Car, d'après le théorème précédent, les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont premiers avec le produit $b_1b_2\ldots b_k$; de même celui-ci est premier avec le produit des précédents ; ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on suppose maintenant que tous les facteurs a soient égaux entre eux, et qu'il en soit de même des facteurs b, on a la propriété suivante :

Lorsque deux nombres sont premiers entre eux, toute puissance de l'un est première avec toute puissance de l'autre.

4° *Lorsqu'un nombre est divisible par deux nombres premiers entre eux, il est divisible par leur produit.*

Soit c un nombre divisible par deux nombres premiers entre eux, a et b. De la première hypothèse, découle l'égalité $c = aq$, q étant un certain nombre entier ; de la seconde, découle que b divise aq, et, comme il est premier avec a, il divise q ; donc on a $q = bq'$, et, par suite, $c = abq'$, ce qu'il fallait démontrer.

5° *Lorsqu'un nombre est divisible par plusieurs nombres premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit.*

Désignons par N un nombre divisible exactement par plusieurs nombres $a, b, c, \ldots, l$, premiers entre eux deux à deux. De nos hypothèses résulte que $N = aq_1$, q_1 étant un certain nombre entier; nous allons montrer maintenant que q_1 est divisible par tous les nombres donnés, autres que a, par exemple par b; en effet, b divise N ou aq_1, par hypothèse, et est premier avec a, donc il divise q_1. Nous aurons donc $q_1 = bq_2$, q_2 étant un certain nombre entier; nous verrons de même que q_2 est divisible par tous les nombres qui viennent après b; nous aurons donc, par exemple, $q_2 = cq_3$, et ainsi de suite. Si donc nous désignons par n le nombre des diviseurs donnés, nous aurons les égalités suivantes :

$$N = aq_1, \quad q_1 = bq_2, \quad q_2 = cq_3, \ldots, \quad q_{n-1} = lq_n;$$

et, par suite, en remplaçant successivement $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}$ par les valeurs indiquées, nous aurons $N = abc\ldots lq_n$, q_n étant un certain entier. C'est justement ce qu'il fallait démontrer.

Conséquence. — *Si un nombre est divisible par plusieurs nombres premiers différents, il est divisible par leur produit.*

Les théorèmes suivants sont aussi complètement évidents, d'après ce qui précède.

Tout nombre premier qui divise un produit de facteurs, divise l'un d'eux.

Tout nombre premier qui divise un produit de facteurs premiers, est égal à l'un d'eux.

Tout nombre premier qui divise une puissance d'un autre nombre, divise ce nombre.

Nous avons vu antérieurement que tout nombre composé N peut se mettre sous la forme

$$N = a^\alpha b^\beta \ldots\ldots l^\lambda,$$

$a, b, \ldots, l$ désignant les facteurs premiers différents du

nombre N et α, β, ..., λ désignant les exposants de chacun d'eux, c'est-à-dire les nombres de fois qu'ils figurent dans N. Les nombres premiers a, b, ..., l sont premiers entre eux deux à deux ; il en est donc de même de leurs puissances, a^α, b^β, ..., l^λ ; par conséquent, il résulte de ce qui précède que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit divisible par N, c'est qu'il soit divisible par les divers nombres a^α, b^β, ..., l^λ.

Le caractère de divisibilité relatif au module N se composera donc de la réunion des caractères de divisibilité relatifs aux modules a^α, b^β, ..., l^λ ; mais ceci n'aura lieu que si l'on se borne à chercher et à énoncer les conditions sous lesquelles un nombre est divisible exactement par N, et non pas si l'on a pour but de trouver le reste de la division d'un nombre par N.

C'est ainsi que l'on reconnaîtra qu'un nombre est exactement divisible par 6, à ce qu'il est divisible successivement par 2 et par 3 ; de même on reconnaîtra qu'un nombre est divisible par 77, à ce qu'il est divisible successivement par 7 et par 11.

83. **Plus petit commun multiple de deux nombres.** — On appelle *multiple commun* à deux nombres, tout nombre qui est exactement divisible par chacun d'eux.

Deux nombres quelconques ont toujours des multiples communs : pour le voir, il n'y a qu'à former leur produit, ou un multiple quelconque de ce produit.

Le plus petit de tous les multiples communs à deux nombres s'appelle le *plus petit multiple commun* de ces deux nombres.

Théorème. — *Le plus petit commun multiple de deux nombres est le quotient de leur produit par leur plus grand commun diviseur. Tout multiple commun à deux nombres est un multiple de leur plus petit commun multiple, et réciproquement.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons chercher la forme des multiples communs à deux nombres donnés a et b ; à cet effet, nous désignerons par δ leur plus grand commun diviseur, et par a', b', les quotients de ces deux nombres par leur plus grand commun diviseur, quotients qui sont, comme l'on sait, premiers entre eux.

Désignons alors par M un multiple commun à a et b ; ce multiple est compris parmi les multiples de a et est de la forme $M = aA$, A étant un certain nombre entier. Pour que M soit en outre divisible par b, il faut que aA soit divisible par b, ou, ce qui est la même chose, que $a'\delta A$ soit divisible par $b'\delta$; il faut donc et il suffit que $a'A$ soit divisible par b' ; or b' est premier avec a', donc il doit diviser A et cela suffit. On a donc $A = mb'$, et, en portant cette valeur de A dans M, on a

$$M = aA = mab' = \frac{mab}{\delta}, \quad \text{car} \quad b' = \frac{b}{\delta},$$

d'après la notation du n° 47.

Les multiples communs à a et b sont donc tous les nombres de la forme $M = \frac{mab}{\delta}$, m étant un nombre entier quelconque.

Le plus petit de tous est donc $\mu = \frac{ab}{\delta}$, et tous les autres sont des multiples de celui-ci. C'est là le théorème que nous voulions démontrer.

Remarque. — Si les deux nombres donnés sont premiers entre eux, leur plus petit commun multiple est leur produit.

Exemples. — Les deux nombres 80712 et 8712 ont pour plus grand commun diviseur 72, ainsi que nous l'avons vu antérieurement ; leur plus petit commun multiple est donc

$$\frac{80712 \times 8712}{72} \quad \text{ou} \quad 80712 \times 121,$$

c'est-à-dire 9766152.

Le plus petit commun multiple de 7 et de 11 est 77.

84. Plus petit commun multiple de plusieurs nombres. — On appelle *multiple commun* à plusieurs nombres, tout nombre exactement divisible par chacun d'eux.

Plusieurs nombres donnés ont toujours des multiples communs : pour le voir, il n'y a qu'à former leur produit, ou un multiple quelconque de ce produit.

Le plus petit de tous les multiples communs à plusieurs nombres est leur *plus petit commun multiple*.

THÉORÈME. — *Pour avoir le plus petit commun multiple de plusieurs nombres*, a, b, c, d, ..., *on forme le plus petit commun multiple de* a *et de* b, μ_1, *puis le plus petit commun multiple de* μ_1 *et de* c, μ_2, *puis le plus petit commun multiple de* μ_2 *et de* d, μ_3 ; *et ainsi de suite. Le dernier nombre ainsi obtenu est le plus petit commun multiple des nombres donnés.*

En effet, les multiples communs à a et b sont les multiples de μ_1 ; on peut donc, au point de vue des multiples communs, remplacer a et b par μ_1, c'est-à-dire a, b et c par μ_1 et c ; les multiples communs à ceux-ci sont les multiples de μ_2 ; on peut donc, au point de vue des multiples communs, remplacer a, b, c par μ_2 ; et ainsi de suite. On arrive ainsi à un dernier plus petit commun multiple, μ, dont les multiples sont les multiples communs aux nombres donnés ; par conséquent ce nombre est le plus petit d'entre eux, et le théorème est démontré.

CONSÉQUENCE. — *Les multiples communs à plusieurs nombres sont les multiples du plus petit commun multiple.*

Si plusieurs nombres sont premiers entre eux deux à à deux, leur plus petit commun multiple est leur produit.

85. Autre manière d'obtenir le plus petit commun multiple de plusieurs nombres. — Formule de Gauss.

1° *Si* μ *est le plus petit commun multiple de plusieurs nom-*

bres a, b, c, d, *les quotients de* μ *par* a, b, c, d *sont premiers dans leur ensemble.*

Soient a', b', c', d' ces quotients. On a

$$\mu = aa' = bb' = cc' = dd'.$$

Si a', b', c', d' avaient un diviseur commun, δ, on aurait

$$a' = a''\delta, \qquad b' = b''\delta, \qquad c' = c''\delta, \qquad d' = d''\delta,$$

et, par suite,

$$\mu = aa''\delta = bb''\delta = cc''\delta = dd''\delta\,;$$

μ serait donc divisible par δ, et le quotient $\frac{\mu}{\delta}$, plus petit que μ, serait un multiple commun à a, b, c, d, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° *Tout multiple commun à plusieurs nombres* a, b, c, d, *est un multiple du plus petit commun multiple.*

Car soient M un multiple quelconque de a, b, c, d, et μ le plus petit commun multiple. Divisons M par μ, nous aurons

$$M = \mu q + \mu' \quad (\mu' < \mu).$$

Puisque M et μ sont tous deux divisibles exactement par a, b, c, d, il résulte du n° 55, 7°, que si μ' n'était pas nul, il serait aussi divisible exactement par a, b, c, d ; alors μ ne serait pas le plus petit commun multiple, ce qui est contraire à l'hypothèse ; donc $\mu' = 0$.

3° *Les quotients d'un multiple quelconque de* a, b, c, d *autre que le plus petit commun multiple, par ces nombres, ne sont pas premiers dans leur ensemble ; cette propriété n'a lieu que pour le plus petit commun multiple.*

Car si μ désigne le plus petit commun multiple, on a

$$\mu = aa' = bb' = cc' = dd',$$

les nombres a', b', c', d' étant premiers dans leur ensemble ; d'autre part, un multiple quelconque M est égal à μq, q étant un entier différent de 1 ; les quotients relatifs à M

sont donc $a'q$, $b'q$, $c'q$, $d'q$; et l'on voit qu'ils ont pour diviseur commun q.

4° *Si on forme les produits des nombres* a, b, c, d *trois à trois et que l'on désigne par* Δ *leur plus grand commun diviseur, le plus petit commun multiple des quatre nombres est égal à leur produit divisé par* Δ.

En effet, considérons le nombre $\frac{abcd}{\Delta}$; c'est un multiple commun à a, b, c et d, puisque les quotients $\frac{bcd}{\Delta}$, $\frac{acd}{\Delta}$, $\frac{abd}{\Delta}$, $\frac{abc}{\Delta}$, sont des nombres entiers ; c'est d'ailleurs le plus petit de tous les multiples communs, puisque ces quotients sont premiers entre eux (n° 81).

* 86. **Calcul des restes obtenus dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres, en fonction de ces nombres.** — Lorsqu'on cherche le plus grand commun diviseur de deux nombres a et b, $a > b$, on est conduit à effectuer diverses divisions que nous avons indiquées par les égalités (1) :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1, & (r_1 < b) \\ b = r_1q_2 + r_2, & (r_2 < r_1) \\ r_1 = r_2q_3 + r_3, & (r_3 < r_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k & (r_k < r_{k-1}) \\ r_{k-1} = r_kq_{k+1}. & \end{array}\right.$$

Il est facile de déduire de là une forme de chacun des restes, dans laquelle a et b seront en évidence. En effet, la première égalité donne $r_1 = a - bq_1$; la seconde donne $r_2 = b - r_1q_2$, et si l'on y remplace r_1 par la valeur que l'on vient d'écrire, cette expression de r_2 devient

$$r_2 = b - q_2(a - bq_1)$$

ou

$$r_2 = b(1 + q_1q_2) - aq_2.$$

Nous voyons donc que ces deux premiers restes sont, au signe près, de la forme $bu - av$, u et v étant des nombres entiers positifs.

Nous allons montrer que d'une manière générale on a, pour un reste quelconque, la forme

$$(-1)^p r_p = bu_p - av_p, \ (^*)$$

u_p et v_p étant des nombres entiers positifs.

Nous venons de voir que cette loi est vraie pour les deux premiers restes ; si donc, en l'admettant jusqu'à un certain indice, nous démontrons qu'elle est vraie pour l'indice suivant, nous l'aurons établie dans toute sa généralité. Admettons donc les deux égalités

$$(-1)^{p-2} r_{p-2} = bu_{p-2} - av_{p-2},$$
$$(-1)^{p-1} r_{p-1} = bu_{p-1} - av_{p-1},$$

et reportons-nous à la p^e division, marquée par la p^e égalité (1) ; celle-ci nous donne

$$r_p = r_{p-2} - r_{p-1} q_p$$

ou $$(-1)^p r_p = (-1)^{p-2} r_{p-2} + (-1)^{p-1} r_{p-1} q_p ;$$

pour avoir $(-1)^p r_p$, il nous suffira donc de multiplier les deux égalités admises par 1 et q_p et de les ajouter ; nous aurons ainsi

$$(-1)^p r_p = b(u_{p-2} + u_{p-1} q_p) - a(v_{p-2} + v_{p-1} q_p).$$

Si donc nous posons

$$u_p = u_{p-2} + u_{p-1} q_p,$$
$$v_p = v_{p-2} + v_{p-1} q_p,$$

nous aurons

$$(-1)^p r_p = bu_p - av_p ;$$

et il est évident, d'après les valeurs que nous venons de trouver pour u_p et v_p, que ces deux nombres sont des entiers positifs, puisque cela a été admis pour les nombres u et v qui viennent avant ceux-ci. Or nous avons vu que la loi est vraie pour les indices 1 et 2, elle est donc vraie pour l'indice 3, puis pour l'indice 4, etc.

Nous voyons en outre que chacun des nombres u se déduit de ceux qui viennent avant, en multipliant le précédent par le quotient de la division qui a donné le reste qu'on calcule et en ajoutant à ce produit le nombre u antéprécédent. Les nombres v se déduisent les uns des autres de la même manière. Il suffit de se reporter aux premiers des nombres u et v, pour voir que l'on peut commencer la suite des u par 1 et q_1, celle des v par 0 et 1 ; le premier quotient à employer pour appliquer la loi de formation précédente est alors q_2, le quotient de la seconde division.

Si nous appliquons le théorème précédent au dernier des restes, r_k, nous aurons de même

$$(-1)^k r_k = bu_k - av_k,$$

(*) $(-1)^p$ est mis en facteur pour donner au premier nombre le signe qu'il doit prendre. D'après les règles des signes concernant le produit de plusieurs nombres entiers, positifs et négatifs, $(-1)^p = +1$, si p est pair, $(-1)^p = -1$, si p est impair, et on a

$$(-1)^p = (-1)^{p-2}, \quad -(-1)^p = (-1)^{p-1}.$$

et en modifiant légèrement les notations actuelles nous pourrons énoncer le théorème suivant, qui est très important.

THÉORÈME. — *Le plus grand commun diviseur* δ *de deux nombres* a *et* b *peut toujours se mettre sous la forme*

$$\pm \delta = bu - av,$$

u *et* v *étant des nombres entiers positifs.*

Si on divise les deux membres de cette égalité par δ, ce qui se fera pour le second en divisant successivement a et b par δ, on aura

$$\pm 1 = b'u - a'v,$$

en désignant par a' et b' les quotients des nombres a et b par leur plus grand commun diviseur. Il résulte de cette égalité que les nombres u et v qui figurent dans l'expression du plus grand commun diviseur sont premiers entre eux, qu'il en est de même des quotients a' et b', et des couples a' et v, b' et u; car si les nombres de l'un de ces couples avaient un diviseur commun, autre que l'unité, ce diviseur appartiendrait à $b'u$ et $a'v$, et, par suite, à $b'u - a'v$, c'est-à-dire à 1, ce qui est impossible.

Les nombres u *et* v *qui figurent dans l'expression du plus grand commun diviseur sont donc premiers entre eux.*

Mais la réciproque n'est pas vraie : il ne suffit pas qu'un nombre δ puisse prendre la forme $\pm \delta = bu - av$, u et v étant des entiers premiers entre eux, pour qu'il soit le plus grand commun diviseur entre a et b.

Exemple : $56 \times 3 - 32 \times 4 = 40$;

3 et 4 sont premiers entre eux, et cependant 40 n'est pas le plus grand commun diviseur entre 56 et 32.

Quand les deux nombres a et b sont premiers entre eux, on a $\delta = 1$ et, par suite,

$$\pm 1 = bu - av.$$

Réciproquement, si cette égalité a lieu dans les conditions indiquées antérieurement, a et b sont premiers entre eux ; donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux nombres a *et* b *soient premiers entre eux, est que l'égalité* $bu - av = \pm 1$ *ait lieu pour certains nombres entiers* u *et* v.

Demandons-nous maintenant si cette égalité $bu - av = \pm 1$, quand elle est possible, peut être satisfaite pour plusieurs couples de nombres entiers u et v. Pour cela, désignons par u_0 et v_0 la *solution* (*) qui provient des calculs précédents et par u, v une

(*) *Équation*, égalité dans laquelle figurent des nombres inconnus, $x, y, z, \ldots$ qu'il faut déterminer de façon que l'égalité soit satisfaite.

Solution d'une équation, système de valeurs que l'on peut attribuer aux inconnues d'une équation, de façon qu'elle soit vérifiée.

autre solution quelconque, s'il y en a; nous aurons à la fois

$$bu - av = \pm 1 \quad \text{et} \quad bu_0 - av_0 = \pm 1 ;$$

nous pourrons d'ailleurs toujours supposer que le signe du second membre est le même dans les deux cas, car si cela n'était pas, comme rien ne nous empêche de supposer u et v négatifs, nous changerions les signes des deux membres de la première égalité. Si nous retranchons alors la seconde de la première, elle devient $b(u - u_0) - a(v - v_0) = 0$, ou

$$b(u - u_0) = a(v - v_0).$$

Or a divisant le second membre, dont il est facteur, divise aussi le premier, qui est égal au second ; de plus, a est premier avec b, donc il divise $u - u_0$ et l'on a $u - u_0 = a\mu$, μ étant un nombre entier positif ou négatif quelconque. Si l'on porte cette valeur de $u - u_0$ dans l'égalité précédente, elle nous donne $v - v_0 = b\mu$. Par conséquent, s'il y a des solutions, elles sont données par les deux formules

$$u = u_0 + a\mu, \qquad v = v_0 + b\mu,$$

dans lesquelles μ désigne un nombre entier quelconque, positif ou négatif. Il est facile de voir, du reste, que tous les couples u et v que nous venons de trouver vérifient l'égalité $bu - av = \pm 1$, le signe $\pm$ étant le signe de la seconde égalité.

Donc l'égalité envisagée a une infinité de solutions, qui sont déterminées par les formules précédentes.

On peut toujours déterminer μ de façon que u soit inférieur à a, d'après la théorie de la division ; alors le nombre correspondant v est aussi inférieur à b ; car on a $av = bu \mp 1$, et, comme u est au plus égal à $a - 1$, on a

$$av \leqslant b(a - 1) \mp 1$$

ou

$$av \leqslant ba - (b \pm 1);$$

cette inégalité montre bien que v est aussi plus petit que b, si $b > 1$; mais si $b = 1$, le plus grand commun diviseur est égal à 1, et alors on a

$$-1 = b(a - 1) - a \times 1 ;$$

dans ce cas $v = b = 1$.

Nous aurons complètement élucidé cette question en montrant que cette solution est justement la solution u_0, v_0, qui découle des opérations qui conduisent au plus grand commun diviseur de a et b.

Nous avons, en effet, $a = bq_1 + r_1$, et $b = r_1q_2 + r_2$; si nous portons cette valeur de b dans celle de a, elle devient

$$a = q_1(r_1q_2 + r_2) + r_1 = r_1u_2 + r_2u_1.$$

Nous démontrerons de même que

$$a = r_2u_3 + r_3u_2\,;$$

il n'y a qu'à remplacer dans l'égalité précédente r_1 par $r_2q_3+r_3$. Et ainsi de suite jusqu'à

$$a = r_{k-1}u_k + r_ku_{k-1},$$

ce qui montre bien que a est supérieur à u_k.

De même, en partant de $b = r_1q_2 + r_2$, on peut écrire cette égalité $b = r_1v_2 + r_2v_1$ puis on obtient $b = r_2v_3 + r_3v_2$, etc., jusqu'à $b = r_{k-1}v_k + r_kv_{k-1}$; donc $b > v_k$.

Or u_k et v_k sont justement les nombres qui ont été désignés par u_0 et v_0. On voit donc que cette solution est bien la solution plus petite que a et b. Dans toutes les égalités de la forme

$$(-1)^pr_p = bu_p - av_p,$$

il en est de même *a fortiori*, puisque u_k est le plus grand des nombres u, et v_k le plus grand des nombres v.

Exemples : 80712 et 8712 conduisent aux divisions :

$$\begin{aligned}
80712 &= 8712 \times 9 + 2304,\\
8712 &= 2304 \times 3 + 1800,\\
2304 &= 1800 \times 1 + 504,\\
1800 &= 504 \times 3 + 288,\\
504 &= 288 \times 1 + 216,\\
288 &= 216 \times 1 + 72,\\
216 &= 72 \times 3 + 0.
\end{aligned}$$

Si donc on désigne par a et b les deux nombres 80712 et 8712, on a pour les restes successifs les diverses expressions :

$$\begin{aligned}
(-1)\,2304 &= 9b - a,\\
(-1)^2 1800 &= 28b - 3a,\\
(-1)^3\,504 &= 37b - 4a,\\
(-1)^4\,288 &= 139b - 15a,\\
(-1)^5\,216 &= 176b - 19a,\\
(-1)^6\,72 &= 315b - 34a,
\end{aligned}$$

que l'on peut calculer directement, ou en tenant compte de la loi de formation que nous avons donnée pour les u et les v : on commencera alors la suite des u par 1 et 9 et la suite des v par 0 et 1, et le premier quotient employé sera $q_2 = 3$.

Si on considère de même les nombres $a = 73$ et $b = 11$, on a la suite des égalités :

$$\begin{aligned}
73 &= 6 \times 11 + 7,\\
11 &= 1 \times 7 + 4,\\
7 &= 1 \times 4 + 3,\\
4 &= 1 \times 3 + 1,\\
3 &= 1 \times 3 + 0,
\end{aligned}$$

et les restes successifs sont :

$$(-1)^7 = 6b - a,$$
$$(-1)^2 4 = 7b - a,$$
$$(-1)^3 3 = 13b - 2a,$$
$$(-1)^4 1 = 20b - 3a.$$

Remarque. — Dans le cas où $b = 1$, la seule division qui existe est la division exacte ; il n'y a aucun reste à calculer, les résultats précédents sont inapplicables ; mais nous avons vu directement que le plus grand commun diviseur 1 s'écrit dans ce cas

$$1 = a - (a - 1)$$

ou

$$-1 = a - 1 - a;$$

donc b étant égal à 1, on a $u = a - 1$, $v = 1$.

*87. **Usage de l'égalité $\pm \delta = bu - av$.** — Nous avons vu antérieurement que l'on peut toujours, par des calculs simples, qui dérivent immédiatement de la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres a et b, mettre ce nombre δ sous la forme

$$\pm \delta = bu - av,$$

u et v étant des nombres entiers premiers entre eux, et le signe du premier nombre étant + ou — suivant que le nombre total des restes est pair ou impair.

Deux résultats découlent immédiatement de là :

1° *Tout diviseur commun à* a *et* b *divise le plus grand commun diviseur de ces nombres.*

Car il divise évidemment $bu - av$.

2° *Les quotients de deux nombres par leur plus grand commun diviseur sont premiers entre eux.*

Car, en appelant a' et b' ces deux quotients, ils satisfont à l'égalité $\pm 1 = b'u - a'v$.

Nous pouvons reprendre ici une partie des résultats déjà trouvés dans ce qui précède, et en donner d'autres démonstrations.

3° *Tout diviseur commun δ', à deux nombres* a *et* b, *autre que le plus grand commun diviseur δ, donne des résultats non premiers entre eux.*

Car les deux quotients obtenus sont encore divisibles par $\frac{\delta}{\delta'}$, qui est un nombre entier (1°).

4° *Si on multiplie les deux nombres* a *et* b *par un nombre quelconque* k, *leur plus grand commun diviseur δ est aussi multiplié par* k.

Car les quotients de ka et kb par $k\delta$ sont a' et b', premiers entre eux (2°, 3°). Donc $k\delta$ est le nouveau plus grand commun diviseur.

5° *Si on divise deux nombres* a *et* b *par un de leurs diviseurs communs, le plus grand commun diviseur est divisé par ce nombre.*

Démonstration analogue à la précédente.

6° *Si un nombre* c *divise un produit de deux facteurs* a *et* b *et est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.*

Supposons c premier avec b ; nous aurons

$$\pm 1 = cu - bv,$$

u et v étant des nombres entiers positifs. En multipliant par a les deux membres de cette égalité, on a

$$\pm a = acu - abv.$$

Or c divise acu, il divise aussi abv, par hypothèse ; donc il divise $acu - abv$, c'est-à-dire $\pm a$ (*).

De ce théorème découlent diverses conséquences, qu'il est inutile de rappeler ici, car nous n'avons rien à changer aux démonstrations déjà données.

7° *Si un nombre est premier avec plusieurs autres, il est premier avec leur produit.*

Soit, en effet, un nombre b premier avec plusieurs autres nombres $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$; cela veut dire qu'il existe des entiers u et v tels que l'on a

$$\begin{aligned} a_1u_1 - bv_1 &= \pm 1, \\ a_2u_2 - bv_2 &= \pm 1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_nu_n - bv_n &= \pm 1. \end{aligned}$$

Si on multiplie toutes ces égalités membre à membre, en observant la règle qui donne le produit de deux sommes algébriques, on voit que, dans le premier membre, tous les termes, sauf le produit de ceux qui sont dans la première colonne, contiennent b en facteur. On a donc

$$a_1a_2 \ldots\ldots a_n\mathrm{U} - b\mathrm{V} = \pm 1,$$

U et V étant des nombres entiers ; par conséquent, $a_1a_2\ldots\ldots a_n$ et b sont premiers entre eux.

De ce théorème et des précédents découlent diverses conséquences déjà établies et sur lesquelles il est inutile de revenir ici, puisque nous ne modifierons pas les démonstrations déjà données.

Remarque. — L'objet de ce paragraphe a été surtout de montrer l'importance de la relation

$$\pm \delta = bu - av,$$

et comment on peut en déduire presque immédiatement tous les

(*) Nous disons qu'un nombre négatif est divisible par un nombre positif, quand sa valeur absolue est divisible par ce nombre. Cette remarque s'applique à tout ce qui précède. Elle est d'ailleurs inutile, si on se reporte au n° 67.

théorèmes établis antérieurement par des méthodes moins rapides. Il est intéressant de montrer que, dans le cas de plusieurs nombres, il y a une égalité de même nature qui exprime le plus grand commun diviseur de ces nombres. Considérons, pour fixer les idées, quatre nombres a, b, c, d, et soient δ_1 le plus grand commun diviseur de a et b, δ_2 le plus grand commun diviseur de δ_1 et c, et enfin δ le plus grand commun diviseur de δ_2 et d. On a

$$\delta_1 = au_1 + bv_1,$$

u_1 et v_1 étant des nombres entiers positifs ou négatifs; de même

$$\delta_2 = \delta_1 u'_2 + cw_2,$$

ou

$$\delta_2 = au_1u'_2 + bv_1u'_2 + cw_2$$

ou

$$\delta_2 = au_2 + bv_2 + cw_2,$$

u_2, v_2, w_2 étant des nombres entiers positifs ou négatifs. Enfin, on a de même $\delta = u'_3\delta_2 + dp_3$ ou $\delta = au_2u'_3 + bv_2u'_3 + cw_2u'_3 + dp_3$, c'est-à-dire

$$\delta = au_3 + bv_3 + cw_3 + dp_3,$$

u_3, v_3, w_3, p_3 étant des entiers positifs ou négatifs, premiers dans leur ensemble.

Quand on a l'habitude des nombres négatifs, la manière dont on écrit l'égalité $\pm\delta = bu - av$ n'a pas d'importance et on peut aussi bien adopter la notation

$$\delta = au + bv.$$

* 88. **Résolution de l'équation $ax + by = c$ en nombres entiers.** — Si a, b et c sont des nombres entiers positifs ou négatifs, on peut se proposer de trouver tous les couples de nombres entiers, positifs ou négatifs, qui, mis à la place de x et y, vérifient l'équation

$$ax + by = c.$$

Tous ces couples de nombres se nomment des solutions de l'équation ; du reste, équation et solution sont des termes que nous avons déjà expliqués sommairement, en note (p. 144).

Pour résoudre la question proposée, on peut remarquer que l'on n'altère pas la condition imposée à x et à y en multipliant ou en divisant les trois nombres a, b, c par le même nombre entier; nous pouvons donc, avant toute recherche, diviser ces trois nombres par leur plus grand commun diviseur, ou, ce qui revient au même, les supposer immédiatement premiers dans leur ensemble.

Cela posé, si a et b n'étaient pas premiers entre eux, le premier membre aurait toujours, pour toute solution entière, les diviseurs qui appartiennent en commun à a et b ; ceux-ci n'appartiendraient pas au second membre c, puisque a, b et c sont

premiers dans leur ensemble. Par conséquent, il ne pourrait pas y avoir égalité, dans cette hypothèse, et l'on en conclut que si a et b ne sont pas premiers entre eux, une fois le plus grand commun diviseur de a, b, c enlevé, l'équation proposée n'a pas de solutions entières. Donc, étant donnée une équation quelconque de ce genre, on cherche le plus grand commun diviseur entre les deux premiers nombres a et b ; si ce plus grand commun diviseur ne divise pas le troisième, c, l'équation n'admet pas de solutions entières.

Il nous reste à montrer que, dans le cas où le plus grand commun diviseur des deux premiers nombres divise le troisième, l'équation proposée a une infinité de solutions entières. Nous supposerons, ce qui peut toujours être réalisé dans ce cas, que a et b sont premiers entre eux. Nous remarquons alors qu'à toute solution entière de l'équation $ax + by = 1$ correspond une solution entière de l'équation $ax + by = c$; car si les nombres entiers x_0 et y_0 vérifient l'équation $ax + by = 1$, il est clair que les nombres cx_0 et cy_0 vérifient l'équation $ax + by = c$.

Remarquons, en outre, que si l'on a une solution entière x_1, y_1, de l'équation proposée, il est facile d'avoir toutes les autres. En effet, appelons x et y une autre solution entière quelconque, en supposant qu'elle existe ; nous aurons, d'après nos hypothèses, à la fois,

$$ax + by = c \qquad \text{et} \qquad ax_1 + by_1 = c;$$

d'où, par soustraction,

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0,$$

c'est-à-dire

$$a(x - x_1) = b(y_1 - y).$$

On voit donc que b divise les deux membres de cette égalité, et, comme il est premier avec a, il divise $x - x_1$; on a donc $x - x_1 = \mu b$, μ étant un certain nombre entier positif ou négatif. En portant cette valeur de $x - x_1$ dans l'égalité précédente, on en tire $y - y_1 = -\mu a$. Donc, étant admis que l'on connaît une solution entière de l'équation x_1, y_1 et qu'il y a d'autres solutions entières, x et y, on voit que toutes ces solutions sont données par les formules

$$x_1 = x_1 + \mu b \qquad \text{et} \qquad y = y_1 - \mu a,$$

dans lesquelles μ peut prendre certaines valeurs entières positives ou négatives. Il est d'ailleurs aisé de voir que quel que soit μ les nombres x et y vérifient l'équation $ax + by = c$. Toute la question revient donc, en dernière analyse, à trouver une solution de l'équation $ax + by = 1$.

Pour cela, nous chercherons, par la méthode ordinaire, le plus grand commun diviseur des nombres a et b, qui est 1, et nous calculerons les restes successifs en fonction de a et de b ; nous

arriverons ainsi à

$$(-1)^k 1 = bu_k - av_k,$$

et, en multipliant les deux membres de cette égalité par $(-1)^k$,

$$1 = a[(-1)^{k-1}v_k] + b[(-1)^k u_k].$$

Nous avons donc, pour l'équation $ax + by = 1$, la solution entière $x_0 = (-1)^{k-1}v_k$ et $y_0 = (-1)^k u_k$; par conséquent, pour l'équation donnée $ax + by = c$, nous avons la solution $x_1 = (-1)^{k-1}cv_k$ et $y_1 = (-1)^k cu_k$. Le problème est maintenant complètement résolu.

Exemples. — *Trouver les solutions entières de l'équation*

$$80712x + 8712y = 216.$$

Le plus grand commun diviseur des deux nombres $a = 80712$ et $b = 8712$ est 72; il divise exactement 216; donc l'équation admet des solutions entières et se ramène à

$$1121x + 121y = 3.$$

Nous aurions à chercher maintenant le plus grand commun diviseur de 1121 et 121, puis à exprimer les restes successifs que l'on trouve ainsi, en fonction de ces deux nombres. Mais nous pouvons nous servir de calculs déjà faits, car nous avons vu que

$$72 = 315b - 34a,$$

et, par suite,

$$1 = 315b' - 34a',$$

en désignant par a' et b' les nouveaux nombres 1121 et 121. Donc nous avons de suite une solution entière de l'équation $1121x + 121y = 1$; c'est $x_0 = -34$ et $y_0 = 315$.

En multipliant ces deux nombres par 3, on a une solution de l'équation

$$1121x + 121y = 3,$$

$$x_1 = -102 \quad \text{et} \quad y_1 = 945.$$

Toutes les autres solutions de cette équation sont données par les formules

$$x = -102 + 121\mu \quad \text{et} \quad y = 945 - 1121\mu,$$

μ étant un entier quelconque positif ou négatif.

Résoudre en nombres entiers l'équation

$$73x - 11y = 1.$$

73 et 11 sont premiers entre eux; donc cette équation a des solutions entières. Pour en avoir une, effectuons les opérations qui conduisent au plus grand commun diviseur, et calculons les restes successifs, comme il a été dit; le dernier d'entre eux, 1, se met sous la forme

$$1 = 11 \times 20 - 73 \times 3;$$

donc $x_0 = -3$ et $y_0 = -20$ est une solution entière de

l'équation proposée ; toutes les autres sont comprises dans les formules

$$x = -3 + 11\mu \quad \text{et} \quad y = -20 + 73\mu,$$

μ étant un entier positif ou négatif. Nous aurions dû écrire

$$x = -3 - 11\mu \quad \text{et} \quad y = -20 - 73\mu,$$

pour nous conformer à ce qui a été dit dans le cas général ; mais, μ pouvant prendre toutes les valeurs entières possibles, positives ou négatives, il n'y a aucun inconvénient à changer le signe de μ.

Remarque. — On peut trouver, d'une façon peu différente, une solution entière de toute équation de ce genre, lorsqu'elle en admet. Prenons, pour exemple, l'équation $73x - 11y = 2$.

Nous raisonnerons ainsi : y doit être choisi de telle sorte que $73x - 2$ soit un multiple de 11 ; si donc nous enlevons les multiples de 11 qui sont dans $73x$, nous devrons avoir $11y_1 = 7x - 2$, y_1 étant un certain nombre entier. De même, nous aurons $7x_1 = 2 + 4y_1$, x_1 étant un nouveau nombre entier ; puis $4y_2 = 3x_1 - 2$, puis $3x_2 = y_2 + 2$. Il est visible maintenant qu'en donnant à y_2 la valeur 1, x_2 prendra une valeur entière, 1. Il n'y a plus, à partir de ce moment, qu'à remonter la suite des équations écrites pour obtenir les valeurs des divers nombres x et y introduits :

$$3x_1 = 4y_2 + 2, \qquad x_1 = 2,$$

puis $\quad 4y_1 = 7x_1 - 2, \qquad y_1 = 3,$

et enfin $\quad 7x = 11y_1 + 2, \qquad x = 5;$

d'où $\quad 11y = 73x - 2 = 363, \qquad y = 33.$

L'équation admet donc la solution entière $x = 5$, $y = 33$, de laquelle on déduit toutes les autres, comme il a été dit.

Il est à remarquer que la solution que l'on trouve ainsi diffère de celle que l'on trouve par la méthode déduite de la théorie du plus grand commun diviseur.

EXERCICES

1° Trouver le plus grand commun diviseur entre 28657 et 17711.

2° Trouver le plus grand commun diviseur entre 1166803 et 247808.

3° Trouver les plus petits communs multiples des deux couples de nombres précédents.

4° Trouver le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple des quatre nombres 49980, 33810, 28420, 4116.

5° Caractères de divisibilité par 18, 24, 36, 45.

6° Si deux nombres sont premiers entre eux, leur somme et leur produit sont des nombres premiers entre eux ; il en est de même de leur différence et de leur produit ; leur somme et leur différence n'ont pas d'autre facteur premier commun que 2.

7° Un nombre impair quelconque et la moitié du nombre précédent sont des nombres premiers entre eux.

8° Le produit de 3 nombres entiers consécutifs est toujours divisible par 6, le produit de 4 nombres entiers consécutifs par 24, et le produit de 5 nombres entiers consécutifs par 120.

9° Le produit de tous les nombres entiers consécutifs depuis 1 jusqu'à $p-1$ est divisible par p quand p n'est pas premier, sauf si $p=4$.

10° Si deux nombres ont pour plus grand commun diviseur δ, quel est le plus grand commun diviseur de l'un d'eux et de leur somme ?

11° Le plus grand commun diviseur de deux nombres est le même que celui de leur somme et de leur plus petit commun multiple.

12° Le plus grand commun diviseur ne change pas quand on divise l'un deux par un nombre premier avec l'autre.

13° Trouver deux nombres dont la somme soit 96 et le plus grand commun diviseur 12.

14° Résoudre en nombres entiers les équations

$$4x-5y=11, \qquad 101x+12y=10,$$
$$36x+60y=12.$$

CHAPITRE III

DÉCOMPOSITION DES NOMBRES ENTIERS EN FACTEURS PREMIERS

89. Nous avons vu que tout nombre entier peut se décomposer, d'une manière et d'une seule, en un produit de nombre premiers (facteurs) qui sont distincts ou non. Nous entendons par là qu'il y a une seule décomposition et non pas un moyen unique de l'obtenir.

Pour effectuer cette décomposition nous ne pouvons procéder que par tâtonnement, et le moyen le plus simple qui se présente à nous est d'essayer successivement, sur le nombre à décomposer, les divers nombres premiers plus petits que lui, en commençant par les plus petits. Chaque fois qu'un essai réussit, on prend le quotient du nombre étudié par le nombre premier reconnu comme facteur de celui-ci, et l'on fait porter les essais suivants sur le nouveau nombre; de sorte que chaque essai qui réussit simplifie l'opération à deux points de vue, d'abord en donnant l'un des facteurs cherchés, puis en reportant les autres essais sur un nombre moindre que le précédent.

Ce procédé est facile à justifier : en effet, soit $N = a.b.c.\ldots.l$ un produit de facteurs premiers, distincts ou non, et supposés rangés par ordre de grandeurs croissantes, c'est-à-dire dans un ordre tel qu'aucun de ces nombres ne soit inférieur à ceux qui le précèdent. Lorsqu'on fera l'essai des nombres 2, 3, 5, 7, ..., jusqu'à a, on ne rencontrera qu'un essai qui réussisse, celui qui est relatif à a. Si alors on dé-

signe par N′ le quotient de N par a, on a $N' = b.c. \ldots .l$, et l'on voit que pour obtenir les autres facteurs premiers de N, il suffit de s'occuper du nouveau nombre N′; il est inutile d'ailleurs d'essayer sur ce nouveau nombre, N′, les nombres premiers inférieurs à a, car si l'un d'eux divisait N′, il diviserait aussi N, qui est un multiple de N′, et ce facteur eût été rencontré dans les essais que l'on a déjà faits sur N. Sur N′ on doit essayer le nombre premier a, car il peut appartenir plusieurs fois à N. On arrive ainsi, en partant de a, à un nouveau facteur premier b, et l'on continue le même moyen d'opération, jusqu'à ce que le dernier nombre obtenu $N^{(k)}$ soit reconnu premier.

Exemple. — Soit le nombre 3780 à décomposer en facteurs premiers. On dispose les résultats sur deux colonnes :

3780	2
1890	2
945	3
315	3
105	3
35	5
7	7

dans une première colonne, celle de gauche, on écrit les uns au-dessous des autres les divers nombres N, N,′ N″, ..., sur lesquels portent les essais, et dans la seconde colonne, celle de droite, on met à côté de chacun des nombres précédents le facteur premier que l'on a essayé.

Le premier essai donne 2, et le quotient de 3780 par 2 est 1890, sur lequel 2 réussit encore; le nouveau quotient est 945 et le facteur premier 2 n'appartient plus à ce nombre. On essaie alors 3, qui réussit, et le nouveau quotient est 315, encore divisible par 3; et ainsi de suite. On est ainsi conduit à la décomposition :

$$3780 = 2.2.3.3.3.5.7 = 2^2.3^3.5.7.$$

L'imperfection théorique d'un pareil procédé est manifeste. On voit en effet que, même en se bornant aux nombres usuels, il faudra une table de nombres premiers très étendue, et qu'un grand nombre d'essais peuvent être nécessaires à chaque fois. Ce procédé ne sera commode que pour les nombres ayant seulement des facteurs premiers très

simples. Prenons encore pour exemple le nombre 345499.

345499	7
49357	7
7051	11
641	641

Les facteurs premiers de ce nombre sont 7, 7, 11, 641. Jusqu'au nombre premier 11, les essais se font rapidement; mais pour reconnaître que 641 est premier, il faut déjà un assez grand nombre d'essais.

On peut être aidé, il est vrai, dans cette recherche, par la connaissance des caractères de divisibilité les plus simples, qui permettent de reconnaître presque immédiatement si un nombre est divisible par 2, par 3, par 5, 7 ou 11; mais au delà de 11, il faut faire la division à chaque fois.

90. Diviseurs d'un nombre entier. — L'une des premières applications qui se présentent est la recherche des diviseurs d'un nombre.

Pour cela, il faut d'abord savoir à quel caractère on reconnaît qu'un nombre B est diviseur d'un autre nombre A. Or, si B est diviseur de A, on peut écrire $A = B.C$, C étant un certain nombre entier; on peut donc, pour décomposer A en facteurs premiers, suivre le procédé suivant : décomposer d'abord B et C séparément en leurs facteurs premiers, puis faire le produit de tous ces nombres. Il résulte de là que chaque facteur premier de B appartient à A, avec un exposant au moins égal à celui qu'il possède dans B.

Cette condition est d'ailleurs suffisante; car, en écrivant A et B sous forme de produits de facteurs premiers, on a

$$A = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots\ldots l^{\lambda},$$

$a, b, c, \ldots\ldots, l$ étant des nombres premiers, et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots, \lambda$ certains nombres entiers; de même

$$B = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots\ldots l^{\lambda'},$$

$\alpha', \beta', \gamma', \ldots\ldots, \lambda'$ étant des nombres entiers non supérieurs à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots, \lambda$, et certains d'entre eux pouvant être nuls (car

il n'est pas nécessaire que B contienne tous les facteurs de A). Il est visible alors que si l'on pose

$$C = a^{\alpha-\alpha'} b^{\beta-\beta'} c^{\gamma-\gamma'} \ldots\ldots l^{\lambda-\lambda'}, \qquad \text{on a} \qquad A = B.C,$$

égalité dans laquelle C désigne un nombre entier et qui montre bien que A est divisible par B.

On obtiendra donc tous les diviseurs de A en formant les divers nombres

$$B = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots\ldots l^{\lambda'},$$

où l'on donne successivement à α' les valeurs 0, 1, 2, ..., α, à β' les valeurs 0, 1, 2, ..., β, etc.

Il y a deux diviseurs particuliers qui méritent d'être signalés; ce sont ceux qu'on obtient en donnant à α', β', γ', ..., λ' la valeur 0, ou bien les valeurs α, β, γ, ..., λ. Le premier est égal à 1 (car nous avons vu qu'on doit toujours prendre $a^0 = 1$, $b^0 = 1$, ...); le second est le nombre A lui-même.

Pour former tous les diviseurs d'un nombre, il faudra donc combiner de toutes les façons possibles les diverses valeurs de $a^{\alpha'}$ avec celles de $b^{\beta'}$, puis les résultats avec les diverses valeurs de $c^{\gamma'}$, etc. A cet effet, on écrit dans un premier tableau les diverses valeurs de $a^{\alpha'}$,

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3, \ldots\ldots,\ a^{\alpha},$$

puis on les multiplie successivement par les diverses valeurs de $b^{\beta'}$,

$$1,\ b,\ b^2,\ b^3, \ldots\ldots,\ b^{\beta};$$

on obtient ainsi un second tableau qui renferme le premier. On multiplie de même les nombres de ce second tableau par les diverses valeurs de $c^{\gamma'}$,

$$1,\ c,\ c^2, \ldots\ldots, c^{\gamma};$$

on obtient un troisième tableau qui renferme le second; et ainsi de suite. Le dernier tableau ainsi obtenu renferme tous les diviseurs de A.

Dans la pratique, on ne récrit pas à chaque fois les tableaux précédents; on se sert des résultats déjà trouvés.

Exemple : Trouver tous les diviseurs de 3780.

Nous avons vu que 3780, décomposé en facteurs premiers, donne

$$3780 = 2^2 3^3 5.7.$$

Les nombres a, b, c, d sont ici 2, 3, 5, 7 ; les nombres α, β, γ, δ sont 2, 3, 1, 1. Les diverses valeurs de a^α, b^β, c^γ, d^δ sont donc

1, 2, 4, pour a^α; 1, 3, 9, 27, pour b^β ;
1, 5, pour c^γ, et 1, 7, pour d^δ.

On a donc les tableaux successifs de diviseurs que voici et que nous avons tous réunis en un seul :

(I)	1	2	4		
(II)	3	6	12		
	9	18	36		
	27	54	108	(III)	
	5	10	20		
	15	30	60		
	45	90	180		
	135	270	540		(IV)
	7	14	28		
	21	42	84		
	63	126	252		
	189	378	756		
	35	70	140		
	105	210	420		
	315	630	1260		
	945	1890	3780		

Remarque. — Pour avoir le nombre des diviseurs d'un nombre A, il suffit de remarquer que le premier tableau contient $\alpha+1$ nombres ; le second contient tous ceux-ci multipliés par les $\beta+1$ nombres de la seconde ligne, c'est-à-dire, en tout $(\alpha+1)(\beta+1)$ nombres ; le troisième tableau en contient $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$; et ainsi de suite. Il y a donc en tout

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots\ldots(\lambda+1)$$

diviseurs du nombre $A = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots l^\lambda$.

Le nombre 3780 possède 3.4.2.2 ou 48 diviseurs, ainsi qu'il est aisé de le vérifier.

En résumé : *Pour avoir le nombre des diviseurs d'un nombre donné, on augmente les exposants de ses divers facteurs premiers chacun d'une unité et on multiplie entre eux les nombres ainsi obtenus.*

On peut se proposer diverses autres questions relativement aux diviseurs d'un nombre ; mais ce n'est pas ici le lieu de les traiter.

91. Plus grand commun diviseur de plusieurs nombres. — Il résulte de ce qui précède, que les facteurs premiers d'un diviseur commun à plusieurs nombres A_1, A_2, ..., A_n, appartiennent tous à chacun des nombres considérés, et que chacun de ces facteurs se trouve dans les nombres donnés avec des exposants non moindres que celui qu'il a dans le diviseur envisagé. Réciproquement, si un nombre B ne contient que les facteurs premiers communs aux divers nombres A_1, A_2, ..., A_n, chacun avec un exposant au plus égal au plus petit de ceux qu'il possède dans les nombres A, ce nombre divise exactement chacun des nombres donnés A_1, A_2, ..., A_n.

Cela posé, désignons par a, b, ..., l les facteurs premiers communs aux n nombres donnés, et par α, β, ..., λ les plus petits exposants qu'ils possèdent respectivement dans les nombres A ; les diviseurs communs à ces nombres seront les diverses valeurs que l'on obtient pour

$$B = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots\ldots l^{\lambda'},$$

en donnant aux exposants α', β', ..., λ' successivement toutes les valeurs 0, 1, 2, ..., α (pour α'), 0, 1, 2, ..., β (pour β'), 0, 1, 2, ..., λ (pour λ').

Le plus grand des nombres B est donc le nombre

$$A = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots\ldots l^{\lambda},$$

et tous les autres sont des diviseurs de celui-ci.

De là résultent les deux propositions suivantes :

1° *Pour former le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, on décompose ceux-ci en facteurs premiers, on prend tous les facteurs premiers communs aux divers nombres, on affecte chacun d'eux du plus petit exposant qu'il a dans les nombres considérés et on fait le produit de tous les nombres ainsi obtenus.*

2° *Les diviseurs communs à plusieurs nombres sont les diviseurs de leur plus grand commun diviseur.*

92. Plus petit commun multiple de plusieurs nombres. — Tout multiple commun à plusieurs nombres, devant admettre tous ceux-ci pour diviseurs, contient tous les facteurs premiers de chacun de ces nombres, et il contient chacun d'eux avec un exposant non moindre que ceux qu'il a dans les nombres donnés. Il est dès lors évident que la forme la plus générale des multiples communs à plusieurs nombres s'obtient en prenant tous les facteurs premiers qui figurent dans les diverses décompositions, chacun d'eux avec son plus haut exposant, et en multipliant le produit de ces divers nombres par un nombre quelconque. Le plus petit de tous ces multiples est celui pour lequel le multiplicateur employé est égal à un.

De là les deux propositions suivantes :

1° *Pour avoir le plus petit multiple commun à plusieurs nombres, on décompose ceux-ci en leurs facteurs premiers, on prend chacun de ces facteurs avec le plus haut exposant qu'il a dans les nombres considérés et on les multiplie entre eux.*

2° *Les multiples communs à plusieurs nombres sont les multiples du plus petit commun multiple.*

Exemple : Soit à trouver le plus grand commun diviseur

et le plus petit commun multiple des nombres 3780, 2520, 360 et 48.

Ces divers nombres décomposés en facteurs premiers donnent

$$3780 = 2^2.3^3.5.7$$
$$2520 = 2^3.3^2.5.7$$
$$360 = 2^3.3^2.5$$
$$48 = 2^4.3.$$

Les facteurs premiers communs à ces nombres sont 2 et 3, leurs plus petits exposants sont 2 et 1; donc le plus grand commun diviseur est $2^2.3 = 12$.

Le plus petit commun multiple s'obtient en prenant tous les facteurs premiers qui figurent dans les quatre décompositions, 2, 3, 5, 7, avec leurs plus hauts exposants, 4, 3, 1, 1; ce nombre est donc $2^4.3^3.5.7 = 15120$.

93. Il résulte de ce qui précède que *si deux nombres n'ont aucun facteur premier commun, ils n'ont pas d'autre diviseur commun que l'unité, et par suite ils sont premiers entre eux;* la réciproque est évidente.

Si plusieurs nombres n'ont aucun facteur premier commun, ils sont premiers dans leur ensemble; la réciproque est encore évidente.

Si plusieurs nombres, A, B, C, *sont premiers respectivement avec un nombre* k, *leur produit est premier avec* k. En effet, ces nombres n'ont, par hypothèse, aucun facteur premier commun avec le nombre k; il en est donc de même de leur produit.

Nous n'avons signalé ces propositions évidentes, — auxquelles on pourrait du reste en adjoindre beaucoup d'autres, — que pour montrer le grand usage qu'on peut faire, dans l'étude des propriétés des nombres, de la décomposition en facteurs premiers.

* 94. **Nombres congrus ou équivalents.** — Deux nombres a et b sont dits *congrus* ou *équivalents*, relativement à un module

donné, m, quand leur différence est divisible par m. Si cela n'est pas, ils sont dits *incongrus* par rapport au module m.

Ex. : 5 et 8 sont congrus relativement au module 3 ; 5 et 7 sont incongrus.

Tout nombre est congru à lui-même relativement à un module quelconque.

Tous les nombres congrus avec un nombre donné a sont compris dans l'expression $a + km$, k désignant un entier quelconque, positif, négatif ou nul. Parmi eux, il y en a deux qui sont inférieurs à m en valeur absolue ; nous les avons appelés les *restes* de a relativement au module m ; le plus petit en valeur absolue s'appelle le *reste minimum*. Au lieu de *reste*, on dit souvent *résidu*.

Les nombres congrus ont les mêmes restes, par rapport au module considéré.

On exprime que deux nombres sont congrus relativement à un module m de la façon suivante :

$$a \equiv b \text{ (mod. } m),$$

et ceci se lit a *congru à* b *module* m.

On voit donc que les deux formules

$$a \equiv b \text{ (mod. } m)$$

et

$$b = a + km,$$

k désignant un entier quelconque, positif, négatif ou nul, sont équivalentes.

Ex. : $25 \equiv 21$ (mod. 4) ; les deux restes sont 1 et -3. Le reste minimum est 1 ; $25 = 21 + 4$, $21 = 1 + 4 \times 5$, $25 = 1 + 4 \times 6$.

La formule $a \equiv b$ (mod. m) s'appelle une *congruence*.

Les congruences jouissent de plusieurs propriétés semblables à celles des égalités.

Si plusieurs nombres sont congrus à un même nombre, par rapport au même module, ils sont congrus entre eux deux à deux.

Cette proposition est complètement évidente, d'après ce que nous avons dit sur la forme générale des nombres congrus à un nombre donné.

Si l'on a : $a \equiv a'$, $b \equiv b'$, ..., $l \equiv l'$ (*mod.* m), *on a aussi*

$$\pm a \pm b \pm \ldots \pm l \equiv \pm a' \pm b' \pm \ldots \pm l' \text{ (mod. m)}.$$

Car les deux membres ne diffèrent que par un certain multiple, positif ou négatif, de m.

Si $a \equiv a'$ (*mod.* m), b *désignant un nombre quelconque, on a aussi* $ab \equiv a'b$ (*mod.* m).

En effet, les nombres a et a' ne diffèrent que par un multiple de m ; il en est donc de même des nombres ab et $a'b$.

Si $a \equiv a'$, $b \equiv b'$ (*mod.* m), *on a aussi* $ab \equiv a'b'$ (*mod.* m).

En effet, on a, par hypothèse, $a = a' + km$ et $b = b' + hm$; donc, en multipliant ces deux égalités membre à membre, on a $ab = a'b' + pm$, p désignant le nombre entier $a'h + b'k + hkm$.

Ce théorème s'étend sans difficulté au cas où on considère un nombre quelconque de congruences.

Les propriétés relatives à la division ne sont pas vraies sans restriction.

Ainsi, de ce que $ab \equiv a'b$ (mod. m), il ne résulte pas nécessairement que $a \equiv a'$ (mod. m) ; cela n'est certain que si b est premier avec m; car alors on a un produit de deux facteurs, divisible par m, $b(a - a')$, et, comme m est premier avec le facteur b, il divise le second, $a - a'$. Mais si b n'est pas premier avec m, soit δ le p. g. c. d. entre b et m ; le produit $\frac{b}{\delta}(a - a')$ est divisible par $\frac{m}{\delta}$, et comme $\frac{b}{\delta}$ et $\frac{m}{\delta}$ sont premiers entre eux, on peut seulement affirmer que $a - a'$ est divisible par $\frac{m}{\delta}$.

La congruence $ab \equiv a'b$ (*mod.* m) *entraîne donc seulement* $a \equiv a'$ (*mod.* $\frac{m}{\delta}$), δ *étant le p. g. c. d. entre* m *et* b.

De même si l'on a $ab \equiv a'b'$ (mod. m) et $a \equiv a'$ (mod. m), il n'en résulte pas nécessairement $b \equiv b'$ (mod. m).

En effet, on a toujours $b = b' + mh + r$, h étant un entier positif ou négatif, et r le reste de $b - b'$ relatif au module m ; en prenant pour r le reste positif, r est compris parmi les nombres $0, 1, 2, \ldots, m - 1$. On déduit de là $b \equiv b' + r$ (mod. m), et, comme $a \equiv a'$ (mod. m), on a

$$ab \equiv a'b' + a'r \text{ (mod. } m).$$

En retranchant la première congruence de celle-ci, il reste $a'r \equiv 0$ (mod. m). Cette condition n'entraîne $r = 0$ que si a' est premier avec m ; mais si a' et m ont un p. g. c. d. δ autre que 1, on a $r = 0$ ou $\frac{m}{\delta}$ ou $\frac{2m}{\delta}$ ou $\frac{3m}{\delta}$, ... ou $\frac{(\delta - 1)m}{\delta}$, et, dans ce cas, on n'a pas nécessairement $b \equiv b'$ (mod m), mais seulement $b \equiv b'$ (mod. $\frac{m}{\delta}$).

Au lieu de a', on eût pu considérer a ; or ces deux nombres, pris successivement avec m, donnent le même p. g. c. d., puisque, par hypothèse, $a - a'$ est divisible par m.

Enfin, il est évident que si deux nombres sont congrus relative-

ment à un module quelconque, ils sont congrus par rapport à tout diviseur de ce module.

Car dire que $a \equiv a'$ (mod. m), c'est dire que $a - a'$ est divisible par m, et alors cette différence est divisible par tout diviseur de m.

* 95. **Idée des congruences entières.** — Si nous considérons une congruence renfermant une inconnue, par exemple la congruence

$$x^3 - 8x + 6 \equiv 0 \text{ (mod. } m),$$

dans laquelle x représente un nombre entier inconnu qui doit rendre le premier membre divisible par m, nous dirons que l'une des valeurs entières de x qui satisfait à cette condition est une *racine* de la congruence.

Il est facile de voir que si une congruence a une racine, x, elle en a une infinité, et que tout nombre congru à x, par rapport au module m, satisfait aussi à la congruence. En effet, soit $y \equiv x$ (mod. m) ; on a $y^3 \equiv x^3$ (mod. m). D'où

$$y^3 \equiv x^3, \qquad -8y \equiv -8x, \qquad 6 \equiv 6 \qquad \text{(mod. } m);$$

il n'y a plus qu'à combiner ces trois congruences par voie d'addition pour obtenir

$$y^3 - 8y + 6 \equiv x^3 - 8x + 6 \equiv 0 \quad \text{(mod. } m).$$

Si donc on a une racine x d'une pareille congruence, tous les nombres de la forme $x + km$ sont aussi racines. On regarde tous ces nombres comme ne formant qu'une solution, et on se borne à chercher les racines inférieures au module m.

Si l'on considère la congruence

$$x^3 - 8x + 6 \equiv 0 \quad \text{(mod. 5)},$$

il n'y a qu'à essayer les 5 nombres 0, 1, 2, 3, 4 ; le premier membre donne les restes 1, 4, 3, 4, 3, et aucun de ces nombres ne convient. Cette congruence n'a pas de racine. On peut en conclure en outre qu'il n'y a pas de nombre entier qui annule $x^3 - 8x + 6$, c'est-à-dire que l'équation $x^3 - 8x + 6 = 0$ n'a aucune racine entière.

Résoudre une congruence, c'est trouver les racines de cette congruence ; on peut dire que la congruence précédente est résolue et n'a pas de racine.

La congruence

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 7x - 6 \equiv 0 \quad \text{(mod. 11)}$$

admet pour racines 1, 5, 10.

* 96. **Caractères de divisibilité.** — Les caractères de divisibilité peuvent être exposés très simplement avec le langage

actuel. Prenons pour exemples les caractères de divisibilité par 9 et par 11.

Soit N un nombre de 7 chiffres, par exemple, et soient a, b, c, d, e, f, g ces chiffres, le nombre étant parcouru de droite à gauche. Nous avons vu que l'on a

$$1 \equiv 10 \equiv 100 \equiv 1000 \equiv 10000 \equiv 100000 \equiv 1000000 \pmod{9};$$

d'où l'on déduit la suite des congruences

$$\left.\begin{array}{lll} a \equiv a, & 10b \equiv b, & 100c \equiv c, \\ 1000\,d \equiv d, & 10000e \equiv e, & 100000f \equiv f, \\ & 1000000\,g \equiv g & \end{array}\right\} \pmod{9}.$$

En ajoutant ces diverses congruences, on obtient

$$N \equiv a+b+c+d+e+f+g \pmod{9}.$$

Il n'y a plus qu'à traduire cette congruence en langage ordinaire pour avoir le caractère de divisibilité par 9.

On a de même

$$1 \equiv 1, \quad 10 \equiv -1, \quad 100 \equiv 1, \quad 1000 \equiv -1, \quad \text{etc.}, \quad \pmod{11}.$$

On en déduit

$$\left.\begin{array}{ll} a \equiv a, \quad 10\,b \equiv -b, & 100\,c \equiv c \\ 1000\,d \equiv -d, & 10000\,e \equiv e \\ 100000\,f \equiv -f, & 1000000\,g \equiv g \end{array}\right\} \pmod{11}.$$

En ajoutant ces diverses congruences on obtient

$$N \equiv a-b+c-d+e-f+g \qquad \pmod{11}.$$

C'est le caractère de divisibilité par 11. Il n'y a plus qu'à traduire cette congruence en langage ordinaire pour obtenir le caractère de divisibilité tel que nous l'avons donné antérieurement.

* 97. **Congruences du premier degré.** — La congruence $ax+b \equiv 0 \pmod{m}$, dans laquelle a et b désignent des nombres entiers donnés, positifs ou négatifs, et où x désigne un nombre entier inconnu, s'appelle la *congruence du premier degré*.

Nous allons chercher les racines de cette congruence, c'est-à-dire les nombres entiers de l'ensemble $0, 1, 2, \ldots, m-1$, qui, mis à la place de x, rendent le premier membre divisible par m.

La résolution de cette congruence revient à la recherche des solutions entières de l'équation à deux inconnues $ax+b=my$ ou $my-ax=b$, pourvu que l'on ne garde de chaque solution que la valeur de x et que l'on se borne à celles qui sont plus petites que m.

Si a et m sont premiers entre eux (voir n° 88), l'équation a une infinité de solutions entières données par les formules $x=x_0+km$, $y=y_0+ka$, dans lesquelles k désigne un

nombre entier quelconque, positif, négatif ou nul. Toutes les valeurs de x sont donc congrues, suivant le module m, au même nombre x_0 ; il y a donc une et une seule racine, le reste de x_0 relatif au module m.

Si a et m ne sont pas premiers entre eux et que leur plus grand commun diviseur ne divise pas le nombre b, il n'y a pas de solution et la congruence est impossible.

Si a et m ont un plus grand commun diviseur δ, autre que 1, et qui divise b, il y a une infinité de solutions entières données par les formules $x = x_0 + k\frac{m}{\delta}$, $y = y_0 + k\frac{a}{\delta}$; et si l'on suppose, ce qui est toujours permis, que x_0 est plus petit que $\frac{m}{\delta}$, on voit que x a δ valeurs incongrues suivant le module m,

$$x_0, \quad x_0 + \frac{m}{\delta}, \quad x_0 + \frac{2m}{\delta}, \ldots, x_0 + (\delta - 1)\frac{m}{\delta}.$$

Ce sont les racines de la congruence proposée.

En particulier, si le module est un nombre premier p et que a ne soit pas divisible par p, la congruence $ax + b \equiv 0 \pmod{p}$ a toujours une racine et une seule.

98. **Théorème de Fermat.** — On eût pu baser l'exposé théorique qui précède sur la proposition suivante, dont nous déduirons d'ailleurs le théorème de Fermat.

Théorème. — *Soient* b *un nombre entier quelconque,* a *et* m *deux nombres entiers premiers entre eux, il y a toujours parmi les* m *nombres suivants, congrus par rapport au module* a,

$$b, \quad b + a, \quad b + 2a, \ldots\ldots, \quad b + (m - 1)a,$$

un nombre et un seul, qui soit congru à un nombre donné A.

En effet, tous ces nombres sont incongrus relativement à m, car la différence entre deux d'entre eux est de la forme ha, h étant un nombre entier plus petit que m ; cette différence ne peut donc être divisible dans aucun cas par le nombre m, puisque m est premier avec a. Donc les restes de tous ces nombres relativement au module m, sont distincts, et, comme ils sont au nombre de m, ce ne peut être que les m restes des divisions par m, $0, 1, 2, \ldots\ldots, m - 1$, ces restes étant d'ailleurs écrits dans un certain ordre. Le reste de A se trouve forcément dans cette suite ; donc il y a sûrement l'un des nombres proposés qui admet le même reste que A, c'est-à-dire qui est congru à A.

Il résulte de là que l'un des nombres $ax + b$ a pour reste 0, c'est-à-dire que la congruence du premier degré a une racine et une seule, dans le cas où a et m sont premiers entre eux.

Théorème de Fermat. — *Si* p *désigne un nombre premier ab-*

solu et a *un nombre non divisible par* p, *on a toujours* $a^{p-1}-1\equiv 0$ (*mod.* p).

Nous venons de voir que les nombres b, $b+a$, $b+2a,\ldots,$ $b+(p-1)a$, admettent pour restes tous les restes des divisions par p, et cela quel que soit b ; si en particulier on prend $b=0$, le premier de ces nombres donne pour reste 0 et les autres donnent pour restes $1, 2, 3,\ldots\ldots, p-1$. On voit donc que les nombres a, $2a$, $3a,\ldots\ldots,$ $(p-1)a$ sont congrus aux nombres $1, 2, 3,\ldots, p-1$; donc le produit $1.2.3\ldots(p-1)a^{p-1}$ est congru au produit $1.2.3\ldots\ldots(p-1)$. On a donc

$$1.2.3\ldots\ldots(p-1)\,a^{p-1}\equiv 1.2.3\ldots\ldots(p-1) \pmod{p};$$

et si l'on divise les deux termes de cette congruence par le nombre $1.2.3\ldots\ldots(p-1)$, qui est premier avec p, on obtient la congruence $a^{p-1}-1\equiv 0$ (mod. p) ; ce qu'il fallait démontrer.

Conséquence. — La congruence $x^{p-1}-1\equiv 0$ (mod. p), dans laquelle p désigne un nombre premier absolu, admet $p-1$ racines ; ce sont les $p-1$ nombres inférieurs à p, $1, 2, 3,\ldots, p-1$.

* 99. **Nombres associés par rapport à un module premier p. — Théorème de Wilson.** — Considérons un nombre premier absolu p et l'ensemble des nombres plus petits que lui, $1, 2, 3,\ldots\ldots, p-1$, et désignons l'un de ces nombres par a ; il y a toujours dans l'ensemble un nombre a' qui, pris avec a, vérifie la congruence $aa'\equiv 1$ (mod. p). En effet, la congruence $ax\equiv 1$ (mod. p) admet une racine et une seule, car a et p sont premiers entre eux. Le nombre a' se nomme l'*associé* de a par rapport au module p.

Deux nombres a et b n'ont pas le même associé ; car s'ils avaient le même associé a', la congruence $a'x\equiv 1$ (mod. p) aurait deux racines, a et b, ce qui n'est pas.

Un nombre est, en général, différent de son associé ; car pour que a soit égal à son associé, il faut que $a^2\equiv 1$ (mod. p), ou $a^2-1\equiv 0$ (mod. p). Le produit $(a-1)(a+1)$ doit donc être divisible par p, c'est-à-dire contenir le facteur premier p ou être nul. Or le premier facteur est toujours inférieur à p : il prend les valeurs $0, 1, 2,\ldots\ldots, p-2$; le second prend les valeurs $2, 3, 4,\ldots\ldots, p$. Le produit $(a-1)(a+1)$ n'est donc divisible par p que si le premier facteur est nul ou le second égal à p ; ceci arrive pour $a=1$, ou $a=p-1$.

Si donc on enlève de l'ensemble $1, 2, 3, \ldots\ldots, p-2, p-1$, le premier et le dernier nombre, les autres peuvent se partager en couples de nombres associés.

Comme application, nous allons démontrer le théorème de Wilson, dont nous donnerons l'énoncé à la fin de ce paragraphe.

Les nombres $2, 3, \ldots\ldots, p-2$ pouvant se distribuer en couples

de nombres associés, leur produit est congru à 1, et l'on a

$$2.3.4. \ldots\ldots (p-2) \equiv 1 \pmod{p}.$$

Il est d'ailleurs évident que

$$1(p-1) \equiv -1 \pmod{p}.$$

En multipliant ces deux congruences, membre à membre, on a

$$1.2.3. \ldots\ldots (p-1) \equiv -1 \pmod{p},$$

ou bien $$1.2.3. \ldots\ldots (p-1)+1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

On voit donc que si p désigne un nombre premier, il divise dans tous les cas la somme $1.2.3. \ldots\ldots (p-1)+1$. Les nombres premiers seuls jouissent d'ailleurs de cette propriété ; car si p n'est pas premier, il admet un facteur premier plus petit que lui, q, et le nombre q faisant partie des nombres $1, 2, 3, \ldots\ldots, p-1$, divise leur produit; il ne divise pas la seconde partie de la somme, qui est 1 ; donc il ne divise pas cette somme. *A fortiori*, p ne la divise pas non plus.

De là le théorème suivant :

Théorème de Wilson. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre* p *soit premier est qu'il divise la somme*

$$1.2.3. \ldots\ldots (p-1)+1.$$

Cette propriété donne donc un moyen infaillible de décider si un nombre est ou n'est pas premier. Malheureusement, les calculs auxquels l'application de ce procédé donne lieu sont inabordables.

* 100. **Sur le nombre des nombres premiers avec un nombre donné et non supérieur à ce nombre.** — Par rapport à un module quelconque m, les nombres entiers se distribuent en classes de la forme $a+km$, k désignant un nombre entier quelconque, positif, négatif ou nul, et a un nombre entier inférieur à m. Tous les nombres d'une même classe ont en commun avec m les mêmes diviseurs ; il suffit donc à ce point de vue de chercher ce qui se passe pour les nombres plus petits que m. Nous allons nous proposer de chercher, parmi ces nombres, ceux qui sont premiers avec m, ou plutôt leur nombre.

Dans le cas où m est égal à 1, le nombre $m=1$ est premier avec lui-même; dans tout autre cas, cela n'a pas lieu, et il suffit de considérer les nombres plus petits que m.

Pour que le cas de $m=1$ rentre dans le cas général, nous appellerons $\varphi(m)$ le nombre des nombres premiers avec m et non supérieurs à m, et nous aurons alors $\varphi(1)=1$; nous aurions eu $\varphi(1)=0$, si nous n'avions pris que les nombres plus petits que m et non m lui-même. — On a de même $\varphi(2)=1$, $\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=2$, $\varphi(5)=4$, etc.

Nous allons montrer que *d'une manière générale, si* a *et* b *sont deux nombres entiers premiers entre eux, on a* $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

En effet, les nombres entiers depuis 1 jusqu'à ab peuvent se mettre dans un rectangle de b lignes contenant chacune a nombres consécutifs,

$$\begin{array}{cccccc}
1, & 2, & 3, & \ldots\ldots, & k, & \ldots\ldots, a \\
a+1, & a+2, & a+3, & \ldots\ldots, & a+k, & \ldots\ldots, 2a \\
2a+1, & 2a+2, & 2a+3, & \ldots\ldots, & 2a+k, & \ldots\ldots, 3a \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(b-1)a+1, & (b-1)a+2, & (b-1)a+3, & \ldots\ldots, & (b-1)a+k, & \ldots\ldots, ba.
\end{array}$$

Tous les nombres d'une même colonne sont de la forme $k + ax$: ils ont avec a les mêmes diviseurs; si donc l'un d'eux est premier avec a, ils sont tous premiers avec a; sinon, non. Or un nombre premier avec ab n'a aucun facteur premier commun avec lui ; il n'a donc aucun facteur premier commun avec a ni avec b et est premier avec chacun d'eux; cela suffit d'ailleurs pour que le nombre envisagé soit premier avec ab. Nous allons donc chercher dans le rectangle les nombres premiers avec a, et, parmi ceux-ci, les nombres premiers avec b; nous aurons ainsi les nombres premiers avec ab. Dans la première ligne, il y a $\varphi(a)$ nombres premiers avec a; chacun d'eux donne une colonne de nombres premiers avec a; il y a donc $\varphi(a)$ colonnes de nombres premiers avec a. Dans l'une de ces colonnes,

$$k, \qquad k+a, \qquad k+2a, \ldots\ldots, \qquad k+(b-1)a,$$

il y a $\varphi(b)$ nombres premiers avec b, car ces divers nombres sont congrus, suivant le module b (n° 98), aux nombres

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, b-1,$$

et, parmi ceux-ci, il y a $\varphi(b)$ nombres premiers avec b, par définition même du symbole $\varphi(b)$. Donc il y a en tout $\varphi(a)\varphi(b)$ nombres premiers avec ab dans le rectangle écrit plus haut.

Ex. : $$\varphi(6) = \varphi(3)\varphi(2) = 2,$$
$$\varphi(12) = \varphi(4)\varphi(3) = 4.$$

Remarque. — Pour que ce théorème soit toujours vrai, il faut donner au symbole $\varphi(m)$ la signification qui lui a été donnée antérieurement, et telle que $\varphi(1) = 1$, sans quoi on n'aurait pas $\varphi(m) = \varphi(m)\varphi(1)$, qui doit avoir lieu dans tous les cas.

Ce théorème est susceptible d'être généralisé :

Soient a, b, c, ..., l *des nombres entiers premiers entre eux deux à deux; on a toujours* $\varphi(a.b.c.\ldots.l) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\ldots\varphi(l)$.

Puisque a et b sont premiers avec c, le produit ab est premiers avec c (n° 82, 3°); de même a, b et c étant premiers

avec d, on a $a.b.c$ premier avec d, etc. On a donc, en appliquant plusieurs fois le théorème précédent :

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$
$$\varphi(abc) = \varphi(ab)\varphi(c),$$
$$\varphi(abcd) = \varphi(abc)\varphi(d),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(abc\ldots\ldots kl) = \varphi(abc\ldots\ldots k)\varphi(l);$$

multiplions toutes ces égalités membre à membre et supprimons, de part et d'autre, les facteurs communs ; nous aurons

$$\varphi(abc\ldots\ldots l) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\ldots\ldots\varphi(l);$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il est facile maintenant de calculer $\varphi(m)$ dans tous les cas :

1° Si m est un nombre premier p, il est premier avec tous les nombres plus petits que lui, et on a $\varphi(p) = p - 1$.

2° Si m est une puissance d'un nombre premier, $m = p^n$, il est premier avec tous les nombres plus petits que lui, sauf les multiples de p,

$$p, \quad 2p, \quad 3p, \ldots\ldots, \quad (p^{n-1} - 1)p,$$

auxquels on peut ajouter $p^{n-1}p$, en allant jusqu'à $m = p^n$; il y a p^{n-1} multiples de p depuis 1 jusqu'à p^n; donc il y a

$$\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1} = p^{n-1}(p - 1)$$

nombres premiers avec p^n et inférieurs à p^n.

Pour $m = 1$, ces formules sont en défaut.

3° Si m est un nombre composé quelconque, et que l'on désigne par $a, b, c, \ldots\ldots, l$ ses facteurs premiers, par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, leurs exposants, on aura

$$m = a^\alpha.b^\beta.c^\gamma\ldots\ldots l^\lambda$$

et m est un produit de nombres tous premiers entre eux deux à deux. On a donc

$$\varphi(m) = \varphi(a^\alpha)\varphi(b^\beta)\varphi(c^\gamma)\ldots\ldots\varphi(l^\lambda),$$

ou $$\varphi(m) = a^{\alpha-1}(a-1)b^{\beta-1}(b-1)\ldots\ldots l^{\lambda-1}(l-1),$$

ou $$\varphi(m) = a^{\alpha-1}b^{\beta-1}\ldots\ldots l^{\lambda-1}(a-1)(b-1)\ldots\ldots(l-1).$$

Remarque. — Lorsque nous aurons étudié les nombres fractionnaires, nous pourrons écrire ainsi $\varphi(m)$:

$$\varphi(m) = a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots l^\lambda\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\ldots\ldots\left(1 - \frac{1}{l}\right)$$

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\ldots\ldots\left(1 - \frac{1}{l}\right).$$

Pour terminer ce paragraphe, nous allons établir que *la somme*

de tous les nombres $\varphi(d)$ *relatifs aux divers diviseurs d'un nombre* m *est égale au nombre* m *lui-même.*

En effet, soit a un nombre inférieur à m; appelons δ le p. g. c. d. entre a et m, les deux nombres $a' = \frac{a}{\delta}$ et $\frac{m}{\delta}$ sont premiers entre eux; on voit donc que tout nombre inférieur à m donne naissance à un nombre $a' = \frac{a}{\delta}$ premier avec un diviseur, $d = \frac{m}{\delta}$ de m, et plus petit que lui. Tout nombre a' plus petit que d (diviseur de m) et premier avec lui, peut d'ailleurs être obtenu ainsi; il provient du nombre $\frac{m}{d}a'$, inférieur à m et ayant avec lui pour p. g. c. d. $\frac{m}{d}$. Enfin chaque couple de nombres a' et d provenant d'un nombre a bien déterminé, n'est obtenu qu'une fois. Si on prend $a = m$, on a le couple 1, 1. On voit donc qu'il y a autant de nombres depuis 1 jusqu'à m, qu'il y a d'unités dans la somme $\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \ldots\ldots$, d, d', d'',..... étant les divers diviseurs de m, pourvu que l'on compte le couple 1, 1, et que l'on prenne $\varphi(1) = 1$. On a donc, avec ces hypothèses, que l'on fait d'ailleurs toujours,

$$\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \ldots\ldots = m.$$

EXERCICES

1° Décomposer en facteurs premiers les nombres 13104, 10584, 15210, 75140, 91494.

2° Former le tableau des diviseurs de chacun de ces nombres.

3° Plus grands communs diviseurs et plus petits communs multiples de ces nombres, pris trois à trois. Tableaux des diviseurs communs de ces groupes.

4° Former les plus petits nombres qui admettent 9 diviseurs, 12 diviseurs, 15 diviseurs, 18 diviseurs.

5° Montrer que les diviseurs d'un nombre $A = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots l^\lambda$ sont les divers termes du produit des sommes

$$1 + a + a^2 + \cdots\cdots + a^\alpha,$$
$$1 + b + b^2 + \cdots\cdots + b^\beta,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$1 + l + l^2 + \cdots\cdots + l^\lambda.$$

6° Effectuer la somme $1 + a + a^2 + \ldots\ldots + a^\alpha$.

7° Trouver la somme des diviseurs d'un nombre donné

$$A = a^\alpha b^\beta \ldots\ldots l^\lambda.$$

8° Trouver le carré du produit de tous les diviseurs d'un nombre. — On commencera par chercher la somme des n premiers nombres entiers.

9° Décomposer un nombre en couples de diviseurs premiers entre eux. Appliquer aux exemples précédents.

10° Calculer n sachant que $n(n+1) = 992$.

11° Décomposer un nombre en trois facteurs premiers entre eux, deux à deux.

12° Calculer n sachant que $n(n+1)(2n+1)$ est égal à 75174.

13° Décomposer $1.2.3.4\ldots\ldots100$ en facteurs premiers. Conclure de ce procédé que le produit de 100 nombres entiers consécutifs est toujours divisible par $1.2.3.4\ldots\ldots100$. Généraliser.

14° Trouver toutes les valeurs de x qui rendent $(x-1)(x+2)$ divisible par 35.
Même question pour $x^2 - 1$ ou $(x-1)(x+1)$.

15° a étant un nombre donné, trouver les valeurs de x pour lesquelles $a + x^2$ est un carré, y^2.

16° Trouver un nombre connaissant le produit de ses diviseurs et leur nombre.

17° Soient A, B, C trois nombres et D leur p. g. c. d. Soient aussi D_1, D_2, D_3 leurs p. g. c. d. deux à deux.
Montrer que le p. p. c. m. des trois nombres est le quotient du produit $A.B.C.D$ par $D_1.D_2.D_3$.

18° Résoudre les congruences $7x - 5 \equiv 0$ (mod. 41), $7x + 35 \equiv 0$ (mod. 42), $42x - 21 \equiv 0$ (mod. 35).

19° Trouver les racines de la congruence $x^3 - 1 \equiv 0$ (mod. 19).

20° Former les nombres premiers avec 36 et plus petits que lui.

21° Montrer que la congruence $4x^{25} - 6x^{21} + 7x^{19} - 1 \equiv 0$ (mod. 19) se ramène à $4x^7 - 6x^3 + 7x - 1 \equiv 0$ (mod. 19). Généraliser.

LIVRE III

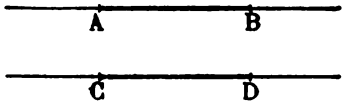
NOMBRES FRACTIONNAIRES. — NOMBRES DÉCIMAUX

CHAPITRE PREMIER

NOMBRES FRACTIONNAIRES

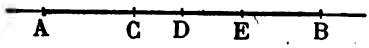
101. Longueurs. — Nous avons vu que le nombre entier a pour objet primordial le dénombrement des objets. Il sert aussi à la *mesure* ou à la représentation numérique des grandeurs qui peuvent se partager en parties toutes égales à une grandeur-type de même espèce, choisie arbitrairement pour *unité*. Mais c'est là un usage à peine différent du précédent, car on peut dire aussi, dans ce cas, que le nombre entier employé sert à dénombrer les unités contenues dans la grandeur à mesurer.

C'est cependant l'extension de cette seconde idée qui va nous conduire à de nouveaux nombres.

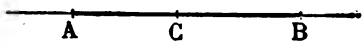


Nous appellerons *longueur* une portion de droite comprise entre deux points A et B. Nous dirons que deux longueurs AB et CD sont *égales*, si l'on peut transporter l'une d'elles sur l'autre de façon qu'elles se recouvrent exactement (ou si l'on peut penser cette opération).

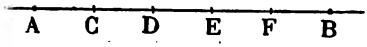
Une longueur AB est dite *somme* de plusieurs autres longueurs AC, CD, DE, EB, lorsqu'elle est formée par la réunion de longueurs égales à celles-ci, placées bout à bout sur la même droite.



Une longueur AC est la *différence* entre deux longueurs AB et CB, quand, ajoutée à la plus petite, elle reproduit la plus grande.



Une longueur est dite *multiple* d'une autre quand elle est la somme de longueurs toutes égales à cette autre. *Ex. :* AB est la somme de 5 longueurs égales AC, CD, DE, EF, FB ; alors AB, qui contient 5 fois AC, est un multiple de AC.



Une longueur AC est dite *sous-multiple* ou *partie aliquote* d'une autre longueur AB, quand celle-ci est un multiple de la première.

Nous regarderons comme évident qu'une longueur quelconque peut toujours être partagée en un nombre quelconque de parties égales, c'est-à-dire qu'il y a toujours des parties aliquotes répondant à un nombre entier quelconque. De même, nous regarderons comme évident que les multiples d'une longueur quelconque finissent par dépasser toute longueur donnée, et que les parties aliquotes d'une longueur quelconque finissent par tomber au-dessous de toute longueur donnée à l'avance.

Deux longueurs égales n'ont pas de différence ; nous dirons cependant qu'elles ont une différence *nulle* ; nous acquerrons ainsi l'idée de *longueur nulle*.

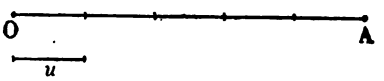
Nous dirons enfin qu'une longueur variable qui finit par être toujours moindre qu'une longueur quelconque tend vers la longueur nulle ou tend vers 0.

Ces dernières notions ne nous serviront d'ailleurs que plus tard.

Enfin, pour comparer les longueurs les unes aux autres, nous choisirons arbitrairement une longueur-type, à laquelle nous comparerons toutes les autres, et que nous appellerons *unité*.

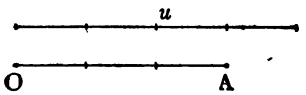
102. **Définition du nombre fractionnaire.** — Lorsqu'on compare une longueur donnée OA à l'unité, deux cas simples peuvent se présenter : ou bien la longueur OA est un multiple de l'unité elle-même, ou bien c'est un multiple d'une partie aliquote de l'unité.

Si la longueur OA est un multiple de l'unité, c'est-à-dire contient un nombre exact de fois l'unité, il suffira d'indiquer ce nombre pour que la longueur soit parfaitement connue. Supposons que OA contienne 5 fois l'unité, nous dirons que le nombre 5 est la *mesure* de OA, et nous représenterons OA par l'égalité conventionnelle $OA = 5u$, comme si OA était le produit de 5 par u.



La somme ou la différence de deux longueurs de ce genre a pour mesure la somme ou la différence arithmétique des mesures de ces longueurs. Ceci résulte immédiatement des définitions. On voit en outre que la définition que nous avons donnée pour la somme de deux longueurs concorde parfaitement avec celle qui a été donnée au début de cet ouvrage.

Cela posé, considérons une longueur OA qui soit multiple d'une partie aliquote de l'unité, et supposons que la partie considérée soit contenue p fois dans l'unité et m fois dans OA. Pour représenter la longueur OA, il faudra former un nouveau nombre, un nouveau symbole numérique qui contienne d'une certaine façon les deux nombres entiers m et p, afin qu'il rappelle que la longueur OA contient



m fois la p^e partie de l'unité. Toute notation dans laquelle entrent les deux nombres m et p est bonne *a priori*. C'est la notation $\frac{m}{p}$ qui est adoptée ; elle se lit *m sur p* ; et ce nouveau symbole numérique s'appelle un *nombre fractionnaire*.

Un nombre fractionnaire exprime la mesure d'une longueur de la seconde espèce ; il indique combien de fois une longueur déterminée contient une certaine partie aliquote de l'unité.

Les deux parties m et p du nombre fractionnaire $\frac{m}{p}$ se nomment les *termes* du nombre ; la partie supérieure s'appelle le *numérateur* ; la partie inférieure, le *dénominateur*. Le dénominateur indique combien de fois la *partie aliquote* employée est contenue dans l'unité ; le numérateur, combien de fois elle est contenue dans la longueur à mesurer. Si la longueur est plus grande que l'unité, m est plus grand que p. Si, au contraire, la longueur est plus petite que l'unité, m est plus petit que p, et, dans ce cas particulier, le nombre s'appelle communément une *fraction*.

Lorsque la fraction ou le nombre fractionnaire est donné numériquement, il s'énonce souvent d'une façon particulière, différente de la lecture signalée plus haut. Ainsi $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ... se lisent *un demi, un tiers, deux tiers, trois quarts*, ... ; $\frac{5}{7}$, $\frac{25}{9}$, se lisent *cinq septièmes, vingt-cinq neuvièmes*, ou *cinq sur sept, vingt-cinq sur neuf*, etc. Le nombre $\frac{25}{9}$ est un nombre fractionnaire ; les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, sont des fractions.

103. Propriétés simples des nombres fractionnaires. — Nous allons déduire de la définition même du nombre frac-

tionnaire toutes les propriétés essentielles de ces nouveaux nombres.

1° Deux nombres fractionnaires seront dits *égaux*, s'ils mesurent la même longueur. Cela posé, soit $\frac{m}{p}$ un nombre fractionnaire qui mesure une longueur OA; cela veut dire que la longueur OA contient m fois une longueur contenue elle-même p fois dans l'unité; désignons cette partie aliquote de l'unité par v. Nous pouvons donc penser que OA est divisée en m parties égales à v et l'unité en p parties égales à v. Prenons maintenant une partie aliquote de v contenue n fois dans v; chacune des p parties de l'unité la contenant n fois, elle sera contenue pn fois dans u; de même, elle sera contenue mn fois dans OA. Donc, par définition, le nombre fractionnaire $\frac{mn}{pn}$ est aussi la mesure de OA. On a donc, quels que soient les entiers m, n, p, l'égalité

$$\frac{mn}{pn} = \frac{m}{p}.$$

De là cette première propriété :

On n'altère pas un nombre fractionnaire en multipliant ses deux termes, ou en les divisant par le même nombre, quand cela se peut.

Ex. : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$; $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$.

2° On dit qu'un nombre fractionnaire *est plus grand* qu'un autre s'il mesure une longueur plus grande que celle mesurée par cet autre; on dit qu'un nombre fractionnaire est *n fois plus grand* qu'un autre s'il mesure une longueur n fois plus grande que celle mesurée par cet autre.

Cela posé, soit $\frac{m}{p}$ un nombre fractionnaire qui mesure une longueur OA, et soit OB une longueur n fois plus

grande que OA. La longueur OA contient m fois une certaine partie aliquote de l'unité ; il est clair que OB contiendra cette partie aliquote n fois plus, c'est-à-dire mn fois. La mesure de OB est donc $\frac{mn}{p}$; mais, par définition, ce nombre est n fois plus grand que $\frac{m}{p}$; donc, en appelant encore multiplication par n, l'opération qui a pour but de rendre $\frac{m}{p}$, n fois plus grand, on a l'égalité

$$\frac{m}{p} \times n = \frac{mn}{p}.$$

De là, cette seconde propriété :

Pour multiplier un nombre fractionnaire par un nombre entier, on multiplie le numérateur par ce nombre entier. De même, on divise un nombre fractionnaire par un nombre entier, en divisant le numérateur par ce nombre, quand cela se peut.

3° On dit qu'un nombre fractionnaire est *plus petit* qu'un autre, s'il mesure une longueur moindre que celle mesurée par cet autre ; il est dit n *fois plus petit* que le second, si la longueur qu'il mesure est n fois plus petite que la seconde.

Cela posé, soit $\frac{m}{p}$ un nombre fractionnaire qui mesure une longueur OA, et soit OB une longueur n fois plus petite que OA. Alors OB contiendra le même nombre de fois que OA une partie aliquote de l'unité n fois plus petite que celle contenue dans OA. Or la partie de l'unité qui sert à mesurer OA est contenue p fois dans l'unité ; donc une partie aliquote n fois plus petite sera contenue n fois dans chacune des précédentes, c'est-à-dire np fois dans l'unité. La mesure de OB est donc $\frac{m}{np}$; et, par définition, ce nombre est n fois plus petit que $\frac{m}{p}$; donc, en appelant

encore division par n l'opération qui a pour but de rendre un nombre n fois plus petit, on a l'égalité

$$\frac{m}{p} : n = \frac{m}{np}\,(*) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\frac{m}{p}}{n} = \frac{m}{np}.$$

De là, cette troisième propriété :

Pour diviser un nombre fractionnaire par un nombre entier, on multiplie le dénominateur par ce nombre. De même, on multiplie un nombre fractionnaire par un nombre entier en divisant le dénominateur par ce nombre, si cela se peut.

Remarque I. — Théoriquement, ces deux dernières propriétés ne sont pas indispensables. Elles entraînent la première. Car si on multiplie le numérateur par un nombre entier n, on rend le nombre considéré n fois plus grand ; puis, en multipliant le dénominateur du nouveau nombre par n, on rend ce nombre n fois plus petit. Le dernier nombre obtenu, $\frac{mn}{pn}$, est donc égal au premier, $\frac{m}{p}$.

Remarque II. — Un nombre entier, a, peut être mis d'une infinité de façons sous forme fractionnaire. On voit d'abord qu'il peut être écrit $\frac{a}{1}$, car ce nombre indique que la longueur mesurée par a contient a fois une partie aliquote contenue une fois dans l'unité. On doit donc écrire $\frac{a}{1} = a$. D'ailleurs, d'après la première propriété, on a

$$\frac{am}{m} = \frac{a}{1} = a.$$

Il résulte de ceci que tout nombre fractionnaire, $\frac{m}{p}$, doit être regardé comme étant le quotient de m par p ; car le produit de $\frac{m}{p}$ par p est $\frac{mp}{p}$ ou m.

L'introduction des nombres fractionaires rend donc possibles toutes les divisions entre nombres entiers ; et la pro-

(*) Le signe : placé entre deux nombres A et B indique la division de A par B ; ainsi A : B est équivalent à $\frac{A}{B}$.

priété précédente explique pourquoi on a choisi pour représenter un nombre fractionnaire la notation même qui sert à indiquer le quotient de deux nombres entiers : *a priori* la manière d'assembler les deux nombres entiers m et p est complètement arbitraire ; mais il est nécessaire de choisir, pour la représentation des nombres fractionnaires et pour celle des quotients, la même notation.

104. Critérium d'égalité des nombres fractionnaires. — Considérons deux nombres fractionnaires égaux $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$. Ce sont deux nombres qui mesurent la même longueur ou des longueurs égales. En prenant des longueurs bb' fois plus grandes, elles auront la même mesure ; or on a ainsi pour mesure les nombres $\frac{abb'}{b}$ et $\frac{a'bb'}{b'}$ qui sont respectivement égaux aux nombres entiers ab' et $a'b$. Donc l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ entraîne l'égalité $ab' = ba'$.

Réciproquement, si l'on a $ab' = ba'$, les deux nombres entiers ab' et ba' mesurent des longueurs égales ; les parties aliquotes de ces longueurs sont donc aussi égales. En prenant des longueurs bb' fois plus petites que les précédentes, on aura donc encore des longueurs égales. Or, celles-ci contiennent le même nombre de fois que les longueurs anciennes, non plus l'unité de longueur, mais la bb'^e partie de celle-ci : les mesures nouvelles sont donc $\frac{ab'}{bb'}$ et $\frac{a'b}{bb'}$, c'est-à-dire (N° 103, 1°) $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$; et ces deux nombres sont égaux, comme mesurant des longueurs égales. Donc l'égalité $ab' = ba'$ entraîne l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

Nous pouvons donc énoncer le caractère suivant, auquel on reconnaît que deux nombres fractionnaires sont égaux :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux nombres fractionnaires $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{a'}{b'}$ *soient égaux, est que les nombres entiers* ab' *et* ba' *soient égaux.*

On démontre de même que si $\frac{a}{b}$ est plus grand que $\frac{a'}{b'}$, on a $ab' > a'b$; et que si $\frac{a}{b}$ est plus petit que $\frac{a'}{b'}$, on a $ab' < a'b$.

Exemples.— $\frac{10}{14} = \frac{15}{21}$; car $10 \times 21 = 15 \times 14 = 210$; $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$, car $2 \times 5 > 3 \times 3$; et enfin $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, car $2 \times 4 < 3 \times 3$.

Remarque. — L'égalité $ab' = ba'$ entraîne quatre égalités distinctes, en apparence,

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \qquad \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}, \qquad \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}.$$

Chacune de celles-ci entraîne la première : ces égalités sont donc complètement équivalentes.

105. Simplification des nombres fractionnaires. — Un nombre fractionnaire est dit *plus simple* qu'un autre, lorsque ses deux termes sont plus petits que ceux de cet autre.

Simplifier un nombre fractionnaire, c'est le remplacer par un autre nombre égal et à termes plus petits.

Considérons, à cet effet, un nombre fractionnaire, $\frac{a}{b}$, dans lequel les deux termes ne sont pas premiers entre eux ; la valeur de ce nombre ne sera pas altérée, en divisant les deux termes par un de leurs communs diviseurs (n° 103, 1°). Toute opération de ce genre donne évidemment un nombre plus simple que le précédent. Une telle simplification ne peut se poursuivre indéfiniment ; elle cesse dès que le numérateur et le dénominateur sont premiers entre

eux, et ceci arrive quand on a enlevé d'une façon quelconque, aux deux termes, tous les facteurs premiers qui leur sont communs. On peut parvenir à ce résultat du premier coup en cherchant le p. g. c. d. entre les deux termes, δ, et en divisant haut et bas par δ.

Le nombre qu'on obtient ainsi, $\frac{\alpha}{\beta}$, s'appelle la *valeur réduite* de $\frac{a}{b}$.

Exemple. — Le nombre $\frac{216}{324}$ peut se remplacer successivement par les nombres plus simples, $\frac{108}{162}$, $\frac{54}{81}$, $\frac{6}{9}$ et $\frac{2}{3}$, en divisant les deux termes successivement par 2, 2, 9 et 3. Le nombre $\frac{2}{3}$, dont les deux termes sont premiers entre eux, est la valeur réduite du nombre proposé. On eût pu l'obtenir immédiatement, en divisant les deux termes du nombre proposé par le produit $2.2.9.3 = 108$ des divers facteurs supprimés dans les deux termes. Il est évident, d'après ce que nous avons vu antérieurement, que 108 est le p. g. c. d. entre 216 et 324.

L'opération dont nous venons de donner un exemple s'appelle la *simplification des nombres fractionnaires*; le nombre fractionnaire $\frac{2}{3}$ est dit *irréductible* ou *réduit à sa plus simple expression.*

Pour justifier toutes ces locutions nous allons montrer que le plus simple de tous les nombres fractionnaires égaux à un nombre donné est sa valeur réduite. Ceci résulte du théorème suivant:

Théorème. — *Tout nombre fractionnaire égal à un autre nombre fractionnaire dont les deux termes sont premiers entre eux, a pour termes des équimultiples de ceux-ci.*

Soient en effet $\frac{a}{b}$ et $\frac{\alpha}{\beta}$ deux nombres fractionnaires

égaux, les deux termes du second étant supposés premiers entre eux. Nous savons que les deux égalités $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$ et $a\beta = b\alpha$ sont équivalentes ; la seconde égalité montre que α divise $b\alpha$ et par suite $a\beta$; mais α est premier avec β; donc il divise a, et on a $a = k\alpha$, k étant un certain nombre entier. En portant cette valeur de a dans l'égalité $a\beta = b\alpha$, on en tire $b = k\beta$.

On voit donc que tout nombre fractionnaire ayant pour valeur réduite $\frac{\alpha}{\beta}$, est de la forme $\frac{k\alpha}{k\beta}$, k étant un certain nombre entier. Réciproquement, tout nombre de cette forme est égal à $\frac{\alpha}{\beta}$.

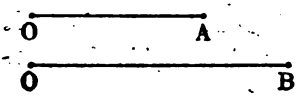
Les nombres fractionnaires égaux à un nombre donné sont en nombre infini, et sont tous les nombres de la forme $\frac{k\alpha}{k\beta}$, k étant un entier quelconque et $\frac{\alpha}{\beta}$ la valeur réduite du nombre.

La valeur réduite d'un nombre fractionnaire est donc bien *le plus simple de tous les nombres qui lui sont égaux*.

Quand on parle de la valeur d'un nombre fractionnaire, c'est toujours de la valeur réduite dont il est question.

Si dans la forme $\frac{k\alpha}{k\beta}$, on fait $k = 0$, on obtient le nombre $\frac{0}{0}$, qui ne représente rien, mais qui peut être regardé comme égal à un nombre fractionnaire quelconque.

Remarque. — Nous dirons que deux longueurs OA et OB sont *commensurables* lorsqu'elles ont une partie aliquote commune, c'est-à-dire lorsqu'il y a une certaine longueur contenue un nombre exact de fois dans OA et aussi dans OB. Si on prend la longueur OB pour unité, et que l'on ait trouvé une longueur contenue m fois dans OA et p fois



dans OB, la longueur OA a pour mesure le nombre $\frac{m}{p}$. La partie aliquote commune à OA et OB s'appelle une *commune mesure* des longueurs OA et OB.

Soit $\frac{\alpha}{\beta}$ la valeur réduite de $\frac{m}{p}$; tous les nombres qui mesurent OA, OB étant pris pour unité, sont de la forme $\frac{k\alpha}{k\beta}$. Il y a donc une infinité de communes mesures à OA et à OB. La plus grande de toutes est celle qui est contenue le plus petit nombre de fois dans OB; la *plus grande commune mesure* à OA et OB est donc la β^e partie de OB et donne pour mesure la valeur réduite $\frac{\alpha}{\beta}$ du nombre $\frac{m}{p}$.

106. Réduction des nombres fractionnaires au même dénominateur. — Lorsque deux nombres fractionnaires ont le même dénominateur, leurs numérateurs indiquent combien de fois les longueurs qu'ils mesurent contiennent une même partie aliquote de l'unité. On reconnaît donc, rien qu'à l'inspection des numérateurs, si les deux nombres sont égaux ou inégaux, et, dans ce dernier cas, quel est le plus grand d'entre eux.

D'autre part, d'après ce qu'on a vu au n° 103, on peut réduire deux nombres fractionnaires au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacun d'eux par le dénominateur de l'autre; car on obtient ainsi les deux nombres $\frac{ab'}{bb'}$ et $\frac{a'b}{b'b}$, égaux respectivement aux précédents, et ayant le même dénominateur. Les deux nombres sont égaux si $ab' = a'b$; le premier est plus grand ou plus petit que le second suivant que $ab' > a'b$ ou $ab' < a'b$. Nous retrouvons ainsi une démonstration rapide des propriétés contenues dans le n° 104.

On peut procéder d'une manière un peu différente; considérons en effet un multiple commun à b et à b', M, et

multiplions les deux termes du premier nombre par le nombre entier $\frac{M}{b}$, puis les deux termes du second par le nombre entier $\frac{M}{b'}$; les deux nombres ne sont pas altérés et sont ramenés à avoir pour dénominateur commun, M. On prend, si cela ne donne lieu à aucune recherche pénible, le p. p. c. m. des deux dénominateurs. Au début, nous avons pris $M = bb'$.

Exemples. — 1° $\frac{3}{4}$ et $\frac{6}{5}$; on multiplie les deux termes du premier nombre par 5, ceux du second par 4, et on a les deux nouveaux nombres $\frac{15}{20}$ et $\frac{24}{20}$, respectivement égaux aux précédents et ayant le même dénominateur. Comme $15 < 24$, on a $\frac{3}{4} < \frac{6}{5}$.

2° $\frac{5}{32}$ et $\frac{6}{72}$; 288 est un multiple commun à 32 et 72, c'est même le p. p. c. m. On multiplie les deux termes du premier nombre par $\frac{288}{32} = 9$, et les deux termes du second par $\frac{288}{72} = 4$; on a ainsi les deux nouveaux nombres $\frac{45}{288}$ et $\frac{24}{288}$; comme $45 > 24$, on en conclut $\frac{5}{32} > \frac{6}{72}$. — On eût pu simplifier, avant tout calcul de ce genre, la seconde fraction, en divisant haut et bas par 6; on eût obtenu alors les deux nombres $\frac{5}{32}$ et $\frac{1}{12}$ à réduire au même dénominateur. Ici le p. p. c. m. des dénominateurs est 96 et les deux nombres que l'on obtient sont $\frac{15}{96}$ et $\frac{8}{96}$.

On réduit de même plusieurs fractions au même dénomi-

nateur, en multipliant les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres; ou, d'une manière plus générale, on emploie un multiple commun à tous les dénominateurs, M, et on multiplie les deux termes de chaque nombre par le quotient obtenu en divisant M par le dénominateur du nombre fractionnaire considéré. Il est clair qu'en opérant ainsi les nombres ne sont pas altérés (n° 103), et qu'ils prennent tous le même dénominateur, M. Il y a avantage à prendre le p. p. c. m., quand on le peut.

Exemple : $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{11}{24}, \frac{3}{8}, \frac{9}{40}, \frac{4}{15}.$

Le p. p. m. c. des dénominateurs est 120; on multipliera donc les deux termes de la première fraction par 40, ceux de la seconde par 60, puis par 20, 5, 15, 3 et 8. Les nombres donnés deviennent respectivement

$$\frac{40}{120}, \frac{60}{120}, \frac{100}{120}, \frac{55}{120}, \frac{45}{120}, \frac{27}{120}, \frac{32}{120}.$$

Rien n'est plus simple alors que de les classer, par ordre de grandeurs croissantes ou décroissantes, et on a

$$\frac{27}{120}, \frac{32}{120}, \frac{40}{120}, \frac{45}{120}, \frac{55}{120}, \frac{60}{120}, \frac{100}{120},$$

c'est-à-dire $\frac{9}{40}, \frac{4}{15}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{11}{24}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6},$

pour les nombres donnés, rangés par ordre de grandeurs croissantes.

Nous allons voir dans la suite d'autres applications de la réduction au même dénominateur. Cette opération, jointe à la simplification des nombres fractionnaires, est constamment employée dans les applications.

CHAPITRE II

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES FRACTIONNAIRES

107. Addition des nombres fractionnaires. — On appelle *somme* de plusieurs nombres fractionnaires le nombre qui mesure la somme des longueurs mesurées par chacun d'eux.

Il en est ainsi quand les longueurs considérées ont pour mesures des nombres entiers; il est donc tout naturel de prendre cette propriété pour définir la somme des nouveaux nombres.

Soient $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots\ldots, \frac{a_n}{b_n}$, n nombres fractionnaires mesurant les longueurs OA_1, OA_2, ..., OA_n; désignons par M un multiple commun aux dénominateurs, b_1, b_2, ..., b_n; nous pouvons, d'après le paragraphe précédent, ramener les nombres à avoir tous pour dénominateur le nombre M, et les écrire sous les formes $\frac{A_1}{M}, \frac{A_2}{M}, \ldots\ldots, \frac{A_n}{M}$. Les nombres ainsi représentés expriment que les longueurs OA_1, OA_2, ..., OA_n contiennent A_1 fois, A_2 fois, ..., A_n fois la M^e partie de l'unité. Donc la longueur formée par la réunion de toutes celles-ci contient $A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_n$ fois cette même partie aliquote de l'unité; elle a donc pour mesure

$$\frac{A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_n}{M},$$

et l'on a les égalités suivantes :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{A_1}{M}, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{A_2}{M}, \ldots\ldots, \frac{a_n}{b_n} = \frac{A_n}{M},$$

et $$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{b_n}=\frac{A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n}{M}.$$

D'où la règle :

RÈGLE. — *Pour ajouter les uns aux autres plusieurs nombres fractionnaires, on les réduit d'abord au même dénominateur, puis on forme un nombre ayant pour dénominateur le dénominateur commun actuel et pour numérateur la somme des numérateurs actuels.*

Si un nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ mesure une longueur plus grande que l'unité, le nombre a est plus grand que b; d'ailleurs la longueur mesurée est la somme d'un multiple de l'unité et d'une longueur plus petite que l'unité ; le nombre fractionnaire lui-même est la somme d'un nombre entier, du nombre qui mesure le multiple de l'unité, et d'une fraction qui mesure la longueur inférieure à l'unité.

On peut, d'après ce qui précède, décomposer immédiatement le nombre fractionnaire, comme il est indiqué. En effet, divisons a par b, nous aurons $a = be + c$ $(c < b)$ et le nombre $\frac{a}{b}$ est égal à $\frac{be+c}{b}$ ou à $\frac{be}{b}+\frac{c}{b}=e+\frac{c}{b}$.

Le nombre entier e s'appelle la *partie entière* du nombre $\frac{a}{b}$, et $\frac{c}{b}$ est la *partie fractionnaire*. On écrit e quelquefois ainsi : $e = E\left(\frac{a}{b}\right)$.

Les nombres fractionnaires se composent donc : des *fractions proprement dites*, qui sont inférieures à 1 et parmi lesquelles on peut mettre le nombre 0; puis des *expressions fractionnaires*, qui sont supérieures à 1, dont chacune est la somme d'un nombre entier et d'une fraction proprement dite, et qui comprennent, comme cas particuliers, tous les nombres entiers.

Les expressions fractionnaires et les nombres entiers se traitent dans les calculs comme les nombres fractionnaires

ordinaires, à la forme desquels ils peuvent toujours se ramener.

108. **Soustraction des nombres fractionnaires.** — La soustraction est l'opération inverse de l'addition : elle a pour but, étant donnés deux nombres différents, de trouver le nombre qu'il faut ajouter au plus petit pour avoir le plus grand. Ce résultat s'appelle la *différence* entre les nombres donnés.

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ deux nombres fractionnaires, tels que $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'}$; proposons-nous de trouver le nombre qu'il faut ajouter à $\frac{a'}{b'}$ pour avoir $\frac{a}{b}$, c'est-à-dire de soustraire $\frac{a'}{b'}$ de $\frac{a}{b}$. Pour cela, réduisons les deux nombres au même dénominateur, d, et soient $\frac{c}{d}$, $\frac{c'}{d}$ les deux résultats obtenus. Nous voyons de suite que le nombre $\frac{c-c'}{d}$ est le nombre demandé, car ce nombre, ajouté à $\frac{c'}{d}$, donne $\frac{c-c'+c'}{d}$ ou $\frac{c}{d}$. D'où la règle :

Règle. — *Pour retrancher un nombre d'un autre, on réduit ces deux nombres au même dénominateur, puis on forme un autre nombre ayant pour dénominateur le dénominateur commun et pour numérateur la différence des numérateurs actuels.*

Si deux nombres fractionnaires sont égaux, leur différence est nulle.

Exemples. — 1° Faire la somme de

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{11}{24}, \frac{3}{8}, \frac{9}{40}, \frac{4}{15}.$$

Ces nombres, réduits au même dénominateur, sont

$$\frac{40}{120}, \frac{60}{120}, \frac{100}{120}, \frac{55}{120}, \frac{45}{120}, \frac{27}{120} \text{ et } \frac{32}{120};$$

leur somme est donc

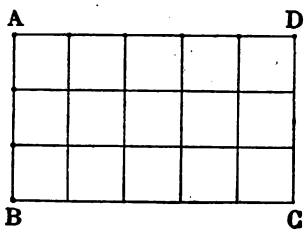
$$\frac{40+60+100+55+45+27+32}{120}=\frac{359}{120}=2+\frac{119}{120}.$$

2° Faire la somme et la différence de $\frac{11}{24}$ et $\frac{9}{40}$. Ces nombres, réduits au même dénominateur, sont $\frac{55}{120}$ et $\frac{27}{120}$. Leur somme est donc $\frac{82}{120}=\frac{41}{60}$, et leur différence, $\frac{28}{120}=\frac{7}{30}$.

109. **Multiplication des nombres fractionnaires.** — On arrive à définir la multiplication des nombres fractionnaires, en généralisant une propriété simple du produit de deux nombres entiers. Cette propriété est relative à la mesure des rectangles qui sont les grandeurs géométriques les plus simples après les longueurs.

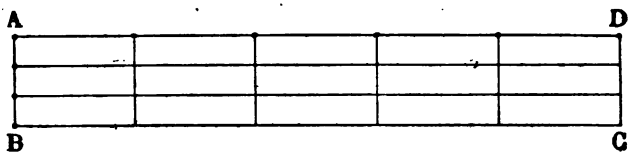
Si on prend pour unité d'aire le carré construit sur l'unité de longueur, le produit de deux nombres entiers mesure l'aire du rectangle qui a pour côtés les longueurs mesurées par les nombres considérés.

Nous allons faire la démonstration sur un exemple numérique : considérons le rectangle ayant pour côtés deux longueurs mesurées par les nombres 3 et 5, c'est-à-dire contenant exactement trois fois et cinq fois l'unité de longueur.



Divisons le plus petit côté AB en trois parties égales, de même l'autre côté AD en cinq parties égales, et par les points de division situés sur chacun d'eux menons des parallèles à l'autre; il est clair que nous divisons ainsi le rectangle en trois rangées de cinq carrés chacune. Ces

carrés ont pour côté l'unité de longueur; la mesure du rectangle est donc 15 ou 5×3.



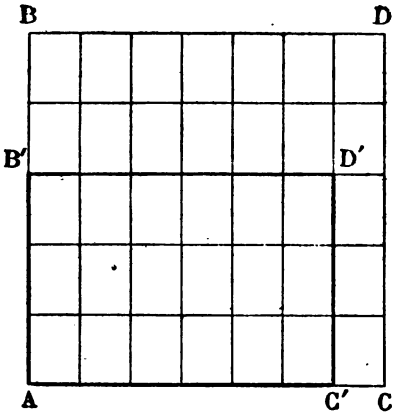
Cette règle est encore vraie si l'un des côtés du rectangle a pour mesure un nombre fractionnaire et l'autre un nombre entier. Supposons, en effet, que l'un des côtés ait pour mesure 3/4 et l'autre 5; divisons le plus grand côté AD en cinq parties égales et le plus petit en trois parties égales. Si par les points de division de chacun de ces côtés nous menons des parallèles à l'autre, nous décomposerons le rectangle donné en trois rangées de cinq rectangles tous égaux; chacun d'eux est d'ailleurs contenu quatre fois dans le carré construit sur l'unité de longueur, puisque l'un de ses côtés est l'unité et l'autre le quart de l'unité. Donc la mesure du rectangle donné est $\frac{15}{4}$ ou $\frac{3}{4} \times 5$.

C'est la généralisation de cette règle qui va nous permettre de définir le produit de deux nombres fractionnaires.

Nous appellerons *produit* de deux nombres fractionnaires, le nombre qui mesure l'aire du rectangle construit sur deux côtés ayant ces nombres pour mesures, à condition toutefois de prendre pour unité d'aire le carré construit sur l'unité de longueur.

Soient, pour fixer les idées, les deux nombres $\frac{3}{5}$ et $\frac{6}{7}$; construisons le carré ayant pour côté l'unité de longueur, et divisons l'un des côtés, AB, en cinq parties égales et l'autre côté, AC, en sept parties égales ; sur le côté AB prenons AB′ égale à trois des cinq parties de AB ; de même sur AC prenons AC′ qui vaut six des sept parties de

AC ; le rectangle donné est alors AC'D'B'. Si par les points de division de chacun des côtés du carré on mène des parallèles à l'autre, on décompose ainsi les deux figures en rectangles tous égaux : le carré unité en contient 5×7



ou 35 et le rectangle donné en contient 3×6 ou 18. Donc la mesure du rectangle est, par définition, $\frac{18}{35}$ ou $\frac{3 \times 6}{5 \times 7}$. Mais ce nombre est justement ce que nous appelons le produit de $\frac{3}{5}$ par $\frac{6}{7}$.

De là, la règle suivante :

Règle. — *Pour multiplier entre eux deux nombres fractionnaires, on forme un nouveau nombre fractionnaire ayant pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs.*

Cette règle s'étend immédiatement au cas de plus de deux facteurs. On définit en effet de proche en proche le produit de plusieurs nombres fractionnaires. Soient $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, ..., $\frac{a_n}{b_n}$, n nombres fractionnaires; on appelle *produit* de tous ces

nombres le résultat obtenu en multipliant d'abord le premier par le second, puis le résultat par le troisième, puis le nouveau résultat par le quatrième, et ainsi de suite. Le numérateur s'obtient, d'après ce qu'on a vu plus haut, en multipliant a_1 par a_2, puis le résultat par a_3, etc. Le dénominateur s'obtient d'une façon analogue.

On voit donc que *le produit de plusieurs nombres fractionnaires est un nouveau nombre fractionnaire qui a pour numérateur le produit des numérateurs, et pour dénominateur le produit des dénominateurs.*

En définitive, tout revient à multiplier entre eux certains nombres entiers. On peut donc écrire les facteurs d'un produit de ce genre dans un ordre quelconque. On emploie aussi la notation de l'exposant, quand les facteurs d'un produit sont égaux. Les règles de calcul relatives aux exposants sont les mêmes que lorsqu'il s'agit de nombres entiers et se démontrent de la même façon (nos 41, 42).

110. Division des nombres fractionnaires. — La division est l'opération inverse de la multiplication.

Diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, c'est trouver un nombre $\frac{a'}{b'}$ qui, multiplié par $\frac{c}{d}$, reproduise le premier nombre. Les trois nombres $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{a'}{b'}$ se nomment *dividende*, *diviseur* et *quotient*.

D'après la règle de multiplication des nombres fractionnaires, un nombre de cette espèce ne change pas si on le multiplie par un nombre fractionnaire quelconque, $\frac{c}{d}$, puis si on multiplie le résultat par le nombre renversé $\frac{d}{c}$; cela revient en effet à introduire les mêmes facteurs haut et bas. On voit donc que le produit de $\frac{a}{b}$ par $\frac{d}{c}$, le nombre $\frac{ad}{bc}$, re-

produit $\frac{a}{b}$ si on le multiplie par $\frac{c}{d}$. C'est donc le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ (*).

On appelle *inverse* d'un nombre fractionnaire, un autre nombre de cette espèce, qui, multiplié par le premier, donne pour produit l'unité. L'inverse de $\frac{a}{b}$ est donc $\frac{b}{a}$: c'est le premier nombre renversé. De là, la règle suivante :

RÈGLE. — *Pour diviser un nombre fractionnaire par un autre nombre fractionnaire, on multiplie le dividende par l'inverse du diviseur.*

La division portant sur des nombres entiers ou fractionnaires, est une opération qui ne présente d'impossibilité que dans le cas où le diviseur est nul. Des quatre opérations que nous venons d'étendre aux nombres fractionnaires, une seule présente des cas d'impossibilité aussi fréquents que les autres cas, c'est la soustraction ; l'opération indiquée par $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ est en effet impossible quand $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$. L'introduction des nombres fractionnaires négatifs nous permettra de lever cette difficulté. L'addition et la multiplication sont toujours possibles.

111. Propriétés de l'addition des nombres fractionnaires. — Propriétés de la soustraction. — L'addition et la soustraction des nombres fractionnaires se ramènent aux opérations similaires effectuées sur des nombres entiers, les numérateurs des divers nombres réduits au même dénominateur. Ces opérations jouissent donc des mêmes propriétés

(*) Il n'y a qu'un seul quotient répondant à la définition donnée, car les produits de $\frac{c}{d}$ par deux nombres différents sont différents.

fondamentales que les opérations de même nom sur les nombres entiers.

Il nous suffit de rappeler ces propriétés.

1° L'addition est *commutative*, c'est-à-dire que, dans une somme, on peut changer l'ordre des parties :

$$A + B = B + A,$$

A et B étant des nombres entiers ou fractionnaires (n° 23).

2° L'addition est *associative*, c'est-à-dire que l'on peut, dans une somme, remplacer diverses parties par leur somme effectuée :

$$A + B + C = A + (B + C),$$

A, B, C étant des nombres entiers ou fractionnaires, et $(B + C)$ désignant la somme $B + C$ effectuée (n° 23).

3° L'addition jouit de la propriété

$$A + 0 = A,$$

A étant entier ou fractionnaire, car, dans ce dernier cas, 0 peut s'écrire $\frac{0}{m}$, m étant un entier quelconque. — Pour les démonstrations de ces propriétés, se reporter au n° 23.

Il y a, pour l'addition actuelle, une nouvelle propriété, évidente dans le cas des nombres entiers, et qui n'a de sens que lorsqu'un nombre donné peut être écrit sous plusieurs formes.

4° L'addition est *uniforme*, c'est-à-dire que le résultat auquel elle conduit est toujours le même, quelles que soient les formes données aux diverses parties.

En d'autres termes, si l'on a $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, on a aussi $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$.

En effet, pour faire l'opération indiquée dans le premier membre, on réduit $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ au même dénominateur, m, de sorte que $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$, $\frac{c}{d} = \frac{p}{m}$, et le premier membre a

pour valeur le nombre fractionnaire $\frac{n+p}{m}$; de même, pour faire l'opération indiquée dans le second membre, on réduit $\frac{a'}{b'}$ et $\frac{c'}{d'}$ au même dénominateur, m', de sorte que $\frac{a'}{b'} = \frac{n'}{m'}$ et $\frac{c'}{d'} = \frac{p'}{m'}$, et le second membre a pour valeur $\frac{n'+p'}{m'}$. Tout revient donc à démontrer que

$$\frac{n+p}{m} = \frac{n'+p'}{m'};$$

or on a $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{n'}{m'}$ et $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$; donc $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$; on a de même $\frac{p}{m} = \frac{p'}{m'}$, et ces deux égalités sont respectivement équivalentes aux égalités $nm' = n'm$ et $pm' = p'm$; en ajoutant ces deux-ci membre à membre, on obtient la nouvelle égalité $m'(n+p) = m(n'+p')$, qui montre que les deux nombres $\frac{n+p}{m}$ et $\frac{n'+p'}{m'}$ sont égaux.

Quant à la soustraction, c'est une opération qui sera généralisée et ramenée à l'addition. Pour le moment, nous nous bornerons à dire que la soustraction jouit de deux propriétés analogues à celles que nous avons établies pour l'addition.

1° On a toujours $A - 0 = A$, que A soit entier ou fractionnaire.

2° La soustraction est une opération uniforme ; cette propriété s'énonce et se démontre comme dans le cas de l'addition.

112. Propriétés de la multiplication et de la division des nombres fractionnaires. — En dernière analyse, la multiplication des nombres fractionnaires se ramène à la multipli-

cation de certains nombres entiers : le numérateur du produit est, en effet, le produit de tous les numérateurs, et le dénominateur est le produit de tous les dénominateurs. Il suit de là que toutes les propriétés fondamentales de la multiplication des nombres entiers sont applicables à la multiplication des nombres fractionnaires.

1° La multiplication est *commutative*, c'est-à-dire que dans un produit on peut changer l'ordre des facteurs. Cette propriété s'exprime par l'égalité $AB = BA$, A et B étant des nombres entiers ou fractionnaires quelconques (n° 38).

2° La multiplication est *associative*, c'est-à-dire que dans un produit on peut remplacer plusieurs facteurs par leur produit effectué. Cette propriété s'exprime par l'égalité symbolique $ABC = A(BC)$, dans laquelle A, B, C désignent des nombres entiers ou fractionnaires quelconques et où (BC) est le produit effectué de B par C (n°s 39, 40).

3° La multiplication est *distributive par rapport à l'addition*, c'est-à-dire que pour multiplier une somme par un nombre quelconque, on peut multiplier chacune des parties de la somme par ce nombre et faire la somme des produits ainsi obtenus. Cette propriété s'exprime par l'égalité symbolique

$$A(B+C) = AB+AC,$$

A, B, C désignant des nombres entiers ou fractionnaires quelconques et $(B+C)$ désignant la somme de B et C (n° 39). Écrire $A(B+C)$ au lieu de $AB+AC$ s'appelle aussi *mettre* A *en facteur*.

4° La multiplication jouit des deux propriétés $A \times 0 = 0$ et $A \times 1 = A$, A désignant toujours un nombre entier ou fractionnaire quelconque.

5° La multiplication est une opération *uniforme*, c'est-à-dire que si dans un produit on remplace chaque facteur par un nombre égal, le résultat n'est pas altéré.

En effet, si on a $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, on en déduit $ab' = ba'$ et $cd' = dc'$.

En multipliant ces deux égalités membre à membre, on obtient $acb'd' = bda'c'$; d'où l'on déduit

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a'c'}{b'd'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}.$$

De la 3e propriété on déduit sans peine que le produit d'une somme par une autre somme s'obtient en multipliant chaque partie de l'une par chaque partie de l'autre et en ajoutant les divers résultats. (Démonstration toute semblable à celle du n° 39.)

Quant à la division, elle se ramène à la multiplication, et jouit de trois propriétés évidentes : elle est *uniforme* (*) (voir ce qui précède, 5°) ; puis on a

$$\frac{A}{1} = A \qquad \text{et} \qquad \frac{0}{A} = 0.$$

Exemples. — Additionner les nombres $\frac{7}{5}$, $\frac{121}{12}$ et $\frac{13}{4}$. On a d'abord $\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5}$, $\frac{121}{12} = 10 + \frac{1}{12}$ et $\frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}$; or, dans la somme, on peut remplacer chaque nombre par les deux parties dont il se compose, ce qui donne

$$1 + \frac{2}{5} + 10 + \frac{1}{12} + 3 + \frac{1}{4},$$

ou $$1 + 10 + 3 + \frac{2}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = 14 + \frac{2}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4},$$

ou $$14 + \frac{2}{5} + \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = 14 + \frac{2}{5} + \frac{4}{12} = 14 + \frac{2}{5} + \frac{1}{3}.$$

On a finalement pour somme $14 + \frac{11}{15}$.

Multiplier $1 + \frac{2}{5}$ par $3 + \frac{1}{4}$. On peut d'abord effec-

(*) La division ne fournit qu'un seul résultat, quelle que soit la forme que l'on donne au dividende et celle que l'on donne au diviseur.

tuer les sommes et multiplier entre eux $\frac{7}{5}$ et $\frac{13}{4}$, ce qui donne $\frac{91}{20} = 4 + \frac{11}{20}$. On peut aussi multiplier terme à terme les deux sommes et ajouter les résultats, ce qui donne $3 + \frac{6}{5} + \frac{1}{4} + \frac{2}{20} = 4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{2}{20} = 4 + \frac{11}{20}$.

113. **Propriétés des égalités.** — Les propriétés simples des égalités ne sont pas autre chose que la traduction dans un langage un peu différent des propriétés relatives aux diverses opérations.

Ainsi : *On peut ajouter le même nombre aux deux membres d'une égalité ; on peut ajouter membre à membre deux égalités.* C'est au fond la 4e propriété de l'addition (n° 111).

On peut multiplier membre à membre deux égalités. C'est la 5e propriété de la multiplication (n° 112), etc.

Les inégalités ne peuvent être sérieusement étudiées qu'après l'introduction des nombres fractionnaires négatifs.

* 114. **Nombres fractionnaires négatifs.** — L'égalité $A + C = B$ définit toujours un nombre entier ou fractionnaire, C, lorsque A et B sont eux-mêmes deux nombres entiers ou fractionnaires et que A est plus petit que B. Ce nombre C se nomme la *différence* entre B et A et se représente par $C = B - A$, de sorte que les deux égalités $A + C = B$ et $C = B - A$ soient équivalentes ; on peut adjoindre l'égalité $A = B - C$ aux deux précédentes : elle leur est équivalente.

Mais si B est plus petit que A, l'égalité conditionnelle $A + C = B$ est impossible ; elle ne définit plus aucun nombre fractionnaire. Si on veut satisfaire à cette égalité, il faut alors créer un nouveau symbole numérique. Remarquons que, dans ce cas, $A - B$ existe et désignons ce nombre par C', de sorte que $A - B = C'$ ou $A - C' = B$. Nous appellerons alors *nombre négatif* un nombre affecté du signe $-$, tel que $-C'$, et nous conviendrons que ce nombre, ajouté à un nombre ordinaire A plus grand que lui, doit être soustrait de celui-ci, comme si le signe $-$ existait seul ; nous aurons ainsi, en posant $C = -C'$, $A + C = A + (-C') = A - C' = B$, et l'égalité sera rendue possible.

Les nombres ordinaires, par opposition à ceux-ci, se nomment des *nombres positifs* ; il sont regardés comme affectés du signe +. La valeur d'un nombre, abstraction faite de son signe, se nomme sa *valeur absolue*.

On voit donc que les signes + ou — ne sont pas seulement des indicateurs d'opérations, mais aussi qu'ils peuvent être liés intimement à des symboles numériques dont ils font partie intégrante.

Ce que nous venons de dire suffit pour montrer que nous allons reprendre identiquement ici tout ce qui a été dit au n° 30. Nous déduirons les propriétés des nombres négatifs de cette définition et de l'obligation que nous nous imposerons de conserver l'équivalence des deux égalités $A + C = B$ et $C = B - A$.

Comme il n'y a qu'à répéter ici les raisonnements déjà faits (n°s 30, 31, 32, 43, 44, 45, 46), nous nous bornerons à énoncer les résultats.

Pour faire la somme de deux nombres, l'un positif, l'autre négatif, on fait la différence de leurs valeurs absolues, et on donne au résultat le signe + ou le signe —, suivant que la plus grande valeur absolue appartient au nombre positif ou au nombre négatif (n° 30).

Pour faire la somme de deux nombres négatifs, on fait la somme de leurs valeurs absolues et on donne au résultat le signe — (n° 31).

Pour soustraire d'un nombre quelconque un nombre négatif, on ajoute au premier la valeur absolue du second (n° 31).

On appelle *somme algébrique* une somme de nombres fractionnaires ou entiers, quelconques, positifs ou négatifs,

$$S = A + B + C + \ldots + K + L,$$

que l'on obtient en ajoutant le second au premier, puis le troisième au résultat obtenu, puis le quatrième au nouveau résultat, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ajoute L à la somme effectuée $A + B + C + \ldots + K$.

La valeur d'une somme algébrique s'obtient en ajoutant les uns aux autres tous les nombres positifs qu'elle contient, puis aussi, les uns aux autres, tous les nombres négatifs qu'elle contient ; soient S_1 *et* $-S_2$ *ces deux sommes. On ajoute ensuite ces deux nombres l'un à l'autre, d'après la première règle* (n° 32).

Pour faire la somme de plusieurs sommes algébriques, on les écrit les unes à la suite des autres, en gardant à chacun des nombres qui les composent le signe qu'il a dans la somme où il se trouve. Si le premier nombre d'une somme n'est précédé d'aucun signe, on lui adjoint le signe + (n° 32).

Pour retrancher une somme algébrique d'une autre somme

algébrique, on écrit à la suite des nombres de celle-ci tous les nombres de la première, changés de signe (n° 32).

L'addition actuelle est une opération *commutative, associative, uniforme,* et jouit en outre des propriétés $A + 0 = A$ et $A + (-A) = 0$ (n° 32).

Si donc on regarde chaque nombre comme précédé d'un signe, + ou —, le signe +, regardé comme signe d'addition, transforme ceux-ci en signes d'opérations d'après les règles suivantes : + sur + donne le signe d'addition, +; + sur — donne le signe de la soustraction, —. De même le signe —, regardé comme signe de soustraction, transforme les signes des nombres, d'après les règles suivantes : — sur + donne le signe de la soustraction, — ; — sur — donne le signe de l'addition, +. *Ex :*

$$+\frac{1}{3}+\left(+\frac{1}{2}\right)=+\frac{5}{6},\quad -\frac{1}{3}+\left(+\frac{1}{2}\right)=+\frac{1}{6},$$

$$+\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6},$$

$$-\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{6},\quad +\frac{1}{3}-\left(+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6},$$

$$+\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=+\frac{5}{6},$$

$$-\frac{1}{3}-\left(+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{6},$$

$$-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=+\frac{1}{6}.$$

Pour abréger l'écriture, on n'écrit pas dans une somme algébrique le signe de l'addition à chaque fois : on se borne à écrire le signe affecté à chacun des nombres qui composent cette somme, et même, si le premier de tous a le signe +, on ne le fait précéder d'aucun signe. Ainsi la somme algébrique

$$-4+(-3)+(+2)+(+8)+(-7)$$

s'écrit simplement $\quad -4-3+2+8-7$;

la somme $\quad +\frac{1}{2}+\left(+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(+\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{9}{4}\right)$

s'écrit $\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{7}{8}-\frac{9}{4}.$

Les démonstrations qui ont été faites aux n°s 30, 31, 32, 43, 44, 45 et 46 s'appuient sur l'idée de nombre entier qui se présente la première à l'esprit : le nombre y est considéré comme indiquant combien il y a d'objets dans un groupe. Les nombres fractionnaires peuvent aussi être envisagés de cette façon : en

effet, réduisons tous les nombres d'une question au même dénominateur, par exemple au dénominateur 180 et envisageons une longueur égale à la 180e partie de l'unité de longueur ; tous les nombres fractionnaires considérés indiquent combien de fois cette partie aliquote de l'unité est contenue dans les longueurs que ces nombres représentent. Alors les démonstrations dont nous avons parlé peuvent se répéter identiquement dans le cas actuel. Il en est de même de celles relatives aux propriétés qui suivent.

Pour multiplier entre eux deux nombres, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, on fait le produit de leurs valeurs absolues et on donne au résultat le signe + ou le signe —, suivant que les deux nombres sont de même signe ou de signes contraires (n° 43).

Pour multiplier une somme algébrique par un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, positif ou négatif, on multiplie chacune des parties de la somme par ce nombre, et on ajoute les résultats obtenus, en tenant compte de leurs signes (N°s 44, 45).

Pour multiplier entre elles deux sommes algébriques, on fait les produits de chacun des termes de l'une d'elles par chacun des termes de l'autre, et on forme avec les résultats une nouvelle somme algébrique (N° 46).

Le quotient de deux nombres quelconques, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, s'obtient en prenant le quotient des valeurs absolues et en lui donnant le signe + ou le signe —, suivant que les deux nombres ont ou n'ont pas le même signe (N° 56).

* 115. **Ensemble des nombres rationnels.** — Tous les nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, constituent un ensemble appelé *ensemble des nombres rationnels* ; on adjoint à ces nombres le nombre 0.

Étant donnés deux nombres de cet ensemble, pour définir le plus grand on généralise un résultat obtenu dans le cas des nombres ordinaires, positifs.

On dit qu'un nombre A *est plus grand* qu'un nombre B quand la différence A — B est un nombre positif. Sinon, on dit que A est *plus petit* que B.

Il résulte de là que tout nombre positif est plus grand que tout nombre négatif ; ainsi

$$4 > -5, \quad \text{car} \quad 4 - (-5) = 4 + 5 = 9.$$

De même 0 est supérieur à tout nombre négatif ; ainsi

$$0 > -2, \quad \text{car} \quad 0 - (-2) = 2.$$

Un nombre négatif est d'autant plus grand que sa valeur absolue est plus petite ; ainsi $-2 > -5$, car

$$-2-(-5) = -2+5 = 3.$$

C'est le contraire qui a lieu pour les nombres positifs, et, pour ceux-ci, la nouvelle définition est d'accord avec celle qui provient de la considération des longueurs.

Si on augmente ou si on diminue le numérateur d'un nombre fractionnaire positif, on augmente ou on diminue ce nombre.

Si on augmente ou si on diminue le dénominateur d'un nombre fractionnaire positif, le nombre diminue ou augmente. Ainsi

$$\frac{8}{15} < \frac{8}{13}, \quad \text{car} \quad \frac{8}{15} - \frac{8}{13} = \frac{8(13-15)}{15.13} = -\frac{8.2}{15.13}.$$

Si on augmente d'un même nombre les deux termes d'un nombre fractionnaire positif, inférieur à 1, on augmente le nombre considéré.

En effet, si $a < b$, on a $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$, car

$$\frac{a+m}{b+m} - \frac{a}{b} = \frac{m(b-a)}{b(b+m)},$$

et cette différence est positive, puisque $b > a$.

C'est le contraire qui arrive si $b < a$, c'est-à-dire si le nombre $\frac{a}{b}$ est supérieur à 1.

On peut augmenter assez le dénominateur d'un nombre fractionnaire positif pour rendre ce nombre plus petit que tout nombre fractionnaire, donné à l'avance.

Ainsi le nombre $\frac{a}{b+m}$, déduit du nombre $\frac{a}{b}$ en ajoutant m unités au dénominateur, peut toujours être rendu plus petit qu'un nombre fractionnaire, donné à l'avance, $\frac{c}{d}$; car la différence $\frac{c}{d} - \frac{a}{b+m} = \frac{bc+cm-ad}{d(b+m)}$ est positive si le nombre $bc+cm$ surpasse ad, et ceci a toujours lieu, quand m est assez grand.

Au-dessous de tout nombre rationnel positif, donné, il y en a une infinité d'autres.

Soit $\frac{a}{b}$ un nombre rationnel positif donné ; le nombre $\frac{a}{b+m}$ est toujours au-dessous de celui-ci, quel que soit l'entier positif, m.

Entre deux nombres rationnels quelconques, positifs ou négatifs, il y a toujours une infinité de nombres de l'ensemble.

Soient, en effet, $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux nombres de l'ensemble et $\frac{a}{b}$ le plus grand ; cela veut dire que la différence $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ est positive ; appelons $\frac{\alpha}{\beta}$ ce nombre ; nous aurons $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{\alpha}{\beta}$. Or au-dessous du nombre $\frac{\alpha}{\beta}$, il y a une infinité de nombres positifs, $\frac{\alpha'}{\beta'}$; donc il y a entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ une infinité de nombres, $\frac{c}{d} + \frac{\alpha'}{\beta'}$.

Il n'y a donc pas dans l'ensemble, à part 0, de nombre plus petit que tous les autres. — Il n'y a pas non plus de nombres consécutifs.

La considération de l'ensemble des nombres rationnels nous conduit à deux idées fondamentales : l'idée de *limite* et l'idée de *continuité*. Ces deux idées ne peuvent s'appliquer qu'à un nombre variable, passant successivement par une infinité de valeurs.

Lorsqu'un nombre rationnel variable prend des valeurs qui finissent par être moindres, en valeur absolue, qu'un nombre quelconque donné à l'avance, on dit que ce nombre tend vers 0.

Désignons par

$$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n, \ldots\ldots$$

les valeurs que prend ce nombre, écrites dans un certain ordre ; d'après l'hypothèse que nous avons faite, les nombres

$$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n, \ldots\ldots,$$

lorsque leur rang est suffisamment éloigné, tombent, en valeur absolue, au-dessous d'un nombre positif quelconque, donné à l'avance.

Nous disons que la suite précédente *a pour limite* 0, ou encore que le nombre variable A_n tend vers 0, lorsque son indice augmente indéfiniment, et nous écrivons

$$\underset{n=\infty}{\text{Lim.}}\ A_n = 0.$$

Ceci se lit : *limite de* A_n, *pour* n *infini, égale* 0.

Considérons maintenant une suite infinie de nombres rationnels, positifs ou négatifs,

$$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n, \ldots\ldots;$$

nous disons que cette suite est *donnée*, lorsque l'on peut calculer un nombre quelconque de cette suite, connaissant son rang.

Ex. : $\frac{5}{7}, \frac{5+1}{7+1}, \frac{5+2}{7+2}, \ldots\ldots, \frac{5+n-1}{7+n-1}, \ldots\ldots$; dans cette suite, le 100e terme a pour valeur $\frac{104}{106}$, le 120e $\frac{124}{126}$, etc.

S'il existe un nombre rationnel, A, dont les nombres de la

suite se rapprochent indéfiniment, c'est-à-dire si l'on peut toujours aller assez loin dans la suite, pour que la différence entre A et un nombre quelconque de la suite, situé au delà d'un certain rang, soit inférieure en valeur absolue à un nombre positif rationnel donné, ε, et si ceci a lieu, quel que soit ce nombre positif rationnel, ε, nous dirons que la suite a pour *limite* le nombre A, ou que le nombre variable A_n *tend vers* A, a *pour limite* A ; et nous écrirons

$$\lim_{n=\infty} A_n = A.$$

Ex. : la suite $\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b+1}, \frac{a+2}{b+2}, \ldots\ldots, \frac{a+n-1}{b+n-1}, \ldots\ldots$ a pour limite le nombre 1, tant que a et b désignent des entiers positifs.

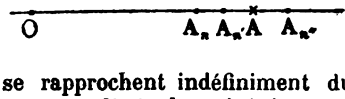
La suite $\frac{a}{b}+1, \frac{a}{b}+\frac{1}{2}, \frac{a}{b}+\frac{1}{4}, \ldots\ldots \frac{a}{b}+\frac{1}{2^n}, \ldots\ldots$ a pour limite $\frac{a}{b}$.

Lorsque le nombre A est positif, passé un certain rang, il n'y a plus dans la suite que des nombres positifs ; car, par hypothèse, il y a toujours un nombre entier p, tel que

$$|A - A_n| < A$$

(valeur absolue de $A - A_n$ plus petit que A), dès que $n \geqslant p$.

Si l'on porte sur une droite quelconque des longueurs OA, OA_n, $OA_{n'}, \ldots\ldots$, ayant toutes pour origine un même point O, et mesurées par les nombres A, A_n, $A_{n'}, \ldots\ldots$, il résulte de nos hypothèses que les points A_n, $A_{n'}$, $A_{n''}, \ldots\ldots$ se rapprochent indéfiniment du point A ; nous dirons qu'ils ont pour *limite* le point A, et que le point A est le *point-limite* de l'ensemble A_n, $A_{n'}$, $A_{n''}, \ldots\ldots$



Cette représentation géométrique échappe, quand le nombre A est nul, car la longueur OA n'existe plus ; il est facile de voir alors que le point O est le point-limite de l'ensemble des points A_n, $A_{n'}$, $A_{n''}, \ldots\ldots$

Nous verrons plus tard qu'il y a une représentation analogue pour les nombres négatifs.

Tout nombre $\frac{a}{b}$ de l'ensemble actuel est la limite d'une infinité de suites appartenant à l'ensemble ; il suffit, en effet, de considérer la suite

$$\frac{a}{b}+\varepsilon_1, \quad \frac{a}{b}+\varepsilon_2, \ldots\ldots, \quad \frac{a}{b}+\varepsilon_n, \ldots\ldots,$$

les nombres rationnels ε_1, ε_2, $\varepsilon_n, \ldots\ldots$ ayant pour limite 0 ; or il y a une infinité de pareilles suites.

Ex. : $\frac{a}{b+1}, \frac{a}{b+2}, \frac{a}{b+3}, \ldots\ldots, \frac{a}{b+n}, \ldots\ldots;$

$$1-\frac{a}{b},\ 1-\frac{a+1}{b+1},\ 1-\frac{a+2}{b+2}, \ldots\ldots,\ 1-\frac{a+n}{b+n}, \ldots\ldots;$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\ldots;$$

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots\ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots\ldots.$$

Lorsque dans un ensemble de nombres, il n'y a pas de nombres consécutifs, qu'il n'y a aucun saut brusque, qu'il y a toujours une infinité de nombres assez près d'un autre pour que leur différence avec cet autre soit moindre qu'un nombre donné à l'avance, ε, et cela quel que soit ε, nous dirons que cet ensemble est *continu*. L'ensemble actuel est continu.

Nous verrons cependant plus tard, en faisant intervenir l'idée géométrique des points d'une droite, que le continu numérique absolu comprend encore d'autres nombres que ceux-ci.

* 116. **Inégalités.** — Si nous exprimons qu'un nombre rationnel A est plus grand qu'un nombre rationnel B, ou plus petit, avec l'un ou l'autre des symboles $>$ ou $<$, nous aurons une *inégalité*,

$$A > B \qquad \text{ou} \qquad A < B.$$

La première exprime que $A = B + P$, P étant un nombre rationnel positif ; la seconde, que $A = B + N$, N étant un nombre rationnel négatif.

1° *Si, aux deux membres d'une inégalité, on ajoute le même nombre rationnel, positif ou négatif, quelconque, on obtient une nouvelle inégalité de même sens que la première.*

Le sens d'une inégalité est indiqué par le symbole de séparation des deux membres $>$ ou $<$.

Soit, par exemple, $A > B$. Cette inégalité revient à $A = B + P$, P étant positif ; si nous ajoutons maintenant, aux deux membres de cette égalité, le nombre C, quelconque, nous aurons $A + C = B + P + C = (B + C) + P$.

Donc on a bien $A + C > B + C$.

2° *Si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par le même nombre positif, on obtient une nouvelle inégalité de même sens que la proposée.*

Soit, par exemple, $A < B$, qui revient à $A = B + N$, N désignant un nombre négatif quelconque. En multipliant les deux membres de cette égalité par un nombre quelconque, C, nous

aurons $AC = (B + N)C = BC + NC$. Or si le nombre C est positif, NC est négatif, et l'on a $AC < BC$.

Si, au contraire, C est négatif, NC est positif, et l'on a $AC > BC$; d'où :

3° *Si l'on multiplie les deux membres d'une inégalité par le même nombre négatif, on obtient une nouvelle inégalité de sens contraire à la proposée.*

Diviser par C, c'est multiplier par $\frac{1}{C}$. On peut donc diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre, en tenant compte des deux propriétés qui précèdent.

4° *Si l'on ajoute membre à membre plusieurs inégalités de même sens, on obtient une nouvelle inégalité de même sens que les proposées.*

Soient, par exemple, $A > B$, $A' > B'$, $A'' > B''$, trois inégalités de même sens; on peut écrire :

$$A = B + P, \qquad A' = B' + P', \qquad A'' = B'' + P'',$$

P, P', P'' étant certains nombres positifs. En ajoutant membre à membre ces diverses égalités, on a :

$$A + A' + A'' = B + P + B' + P' + B'' + P'',$$
$$A + A' + A'' = B + B' + B'' + P + P' + P'',$$
$$(A + A' + A'') = (B + B' + B'') + (P + P' + P'');$$

mais $P + P' + P''$ est un nombre positif; donc on a

$$A + A' + A'' > B + B' + B''.$$

Avant de procéder à l'addition de plusieurs inégalités de même sens, on peut multiplier certaines d'entre elles par des nombres positifs.

Si toutes les inégalités que l'on considère n'ont pas le même sens, on multipliera certaines d'entre elles par des nombres négatifs, par exemple par -1, et on obtiendra ainsi des inégalités de même sens.

Pour exprimer qu'un nombre est positif, nous écrirons maintenant $A > 0$; et, pour exprimer qu'un nombre est négatif, nous écrirons $A < 0$.

EXERCICES

1° Les fractions $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n}{2n+1}$, $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ sont irréductibles.

2° Réduire à sa plus simple expression la fraction

$$\frac{574574}{999999}.$$

3° Trouver une fraction telle que la somme du numérateur et du dénominateur soit 80 et leur différence, 50. Réduire cette fraction à sa plus simple expression.

4° Former les plus petits nombres tels que le produit du numérateur par le dénominateur soit 80 et la somme de ces deux nombres inférieure à 25.

5° Réduire plusieurs nombres fractionnaires à leur plus petit dénominateur commun. Appliquer au cas de deux nombres irréductibles dont les dénominateurs sont premiers entre eux.

6° La somme de deux fractions irréductibles de dénominateurs différents n'est jamais un nombre entier.

7° Lorsque le dénominateur d'un nombre fractionnaire est le produit de deux nombres entiers premiers entre eux, a et b, ce nombre fractionnaire est la somme ou la différence de deux autres nombres fractionnaires de dénominateurs a et b. Cette transformation peut se faire d'une infinité de manières. — Généraliser.

8° Effectuer les sommes

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)};$$

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)};$$

$$\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n(2n+2)}.$$

9° Que faut-il pour que le produit ou le quotient de deux nombres fractionnaires irréductibles soit un nombre entier?

10° On donne plusieurs fractions irréductibles ; trouver la plus petite fraction irréductible dont les produits par ces fractions soient entiers.

11° On range par ordre de grandeur les fractions irréductibles inférieures à 1 et dont le dénominateur ne dépasse pas un nombre donné ; montrer que si on prend à volonté dans cette suite trois fractions consécutives :

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a''}{b''},$$

on a

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a + a''}{b + b''}.$$

12° On appelle *multiple* d'un nombre fractionnaire le produit de ce nombre par un entier quelconque. Trouver le p. p. m. c. de deux ou plusieurs nombres fractionnaires.

13° Trouver des fractions ayant pour dénominateurs des puissances de 3 et comprises entre $\frac{435}{95737}$ et $\frac{435}{95738}$.

CHAPITRE III

NOMBRES DÉCIMAUX

117. Définition du nombre décimal. — Représentation de ce nombre. — On appelle *nombre décimal* un nombre fractionnaire qui a pour dénominateur 10 ou une puissance de 10.

Exemples. — $\frac{43}{10}$, $\frac{57}{100}$, $\frac{6981}{1000}$, $\frac{107}{10000}$.

On appelle plus particulièrement *fraction décimale* un nombre décimal inférieur à 1.

Exemples. — $\frac{57}{100}$, $\frac{107}{10000}$, $\frac{6981}{10^5}$, $\frac{327804}{10^7}$.

Si on prend pour numérateur l'unité, les fractions décimales sont $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10^4}$, $\frac{1}{10^5}$, ... Chacune d'elles est 10 fois plus petite que celle qui la précède (n° 103).

Ces fractions portent le nom d'*unités du premier*, *du second*, *du troisième*, ... *ordre décimal*.

Si on les compare aux unités des divers ordres qui ont été introduites dans la numération des nombres entiers, on a la suite

$$\ldots\ldots, 1000, 100, 10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots\ldots,$$

illimitée dans les deux sens, et où chaque nombre est dix fois plus petit que celui qui le précède (en marchant de gauche à droite).

L'ordre d'une unité décimale est marqué par le nombre de zéros qu'il y a au dénominateur, ou, ce qui revient au

même, par l'exposant de la puissance de 10 qui figure au dénominateur.

Considérons un nombre décimal quelconque $\frac{326749108}{100000}$ et occupons-nous du numérateur 326749108. Ce nombre exprime combien le nombre décimal considéré contient d'unités du 5e ordre décimal. Mais, dans ce nombre, abstraction faite de ce qu'il représente actuellement, le 2e, le 3e, le 4e, ... chiffre obtenu en parcourant le nombre de droite à gauche, représente des groupes de 10, de 100, de 1000, ... unités de l'ordre représenté par le dernier chiffre décimal, à droite du nombre. Nous ne faisons que rappeler la convention fondamentale de la numération écrite.

Les chiffres 0, 1, 9, 4, 7, 6, 2, 3, représentent des unités 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000, 100000000 de fois plus grandes que les unités représentées par le chiffre 8 et qui sont ici des unités du 5e ordre décimal. Donc 0 représente les unités du 4e ordre décimal ; 1, les unités du 3e ordre décimal ; 9, des unités du second ordre décimal ; 4, des unités du premier ordre décimal ; alors 7 représente des unités ordinaires ; 6, des dizaines ; 2, des centaines ; et 3, des milles.

Le nombre considéré vaut alors 3267 unités, plus $\frac{4}{10}$ (qui se lit *quatre dixièmes*), plus $\frac{9}{100}$ (qui se lit *neuf centièmes*), plus $\frac{1}{1000}$ (qui se lit *un millième*), plus $\frac{8}{100000}$ (qui se lit *huit cent-millièmes*).

On peut donc représenter le nombre décimal proposé, en écrivant simplement le numérateur, pourvu qu'un signe quelconque indique la nature des unités représentées par le dernier chiffre à droite. Mais, en étendant la convention faite en numération écrite, que tout chiffre placé à droite d'un autre représente des unités dix fois plus petites que celles représentées par cet autre, il suffira de marquer la

place des unités ordinaires : on emploie à cet effet une virgule que l'on place immédiatement après le chiffre des unités, et le nombre décimal $\frac{326749108}{100000}$ est représenté d'une manière parfaitement claire par

$$3267{,}49108,$$

puisque la valeur de chacune des parties de ce nombre est nettement indiquée.

Règle. — *Pour représenter un nombre décimal, on écrit le numérateur comme si ce nombre existait seul, en séparant sur sa droite, à l'aide d'une virgule, autant de chiffres qu'il y a de zéros au dénominateur ou d'unités dans l'exposant de la puissance de* 10 *qui sert de dénominateur.*

Dans le cas où le numérateur a moins de chiffres que le dénominateur, cette règle n'est pas immédiatement applicable. Il suffit alors de se rappeler que l'on n'altère pas la valeur d'un nombre entier quelconque, en ajoutant, à gauche de ce nombre, autant de zéros que l'on veut : ainsi $4329 = 004329$. On peut donc, par ce moyen, donner autant de chiffres que l'on veut au numérateur d'un nombre décimal quelconque ; on se bornera, lorsque cela sera nécessaire, à lui en donner autant qu'il y en a au dénominateur. Le premier zéro à gauche représentera les unités ordinaires, et on n'aura plus qu'à appliquer la règle ci-dessus, c'est-à-dire mettre une virgule à la suite de ce premier zéro.

Exemples.

$$\frac{235}{10000} = 0{,}0235,$$

$$\frac{4327}{1000000} = 0{,}004327,$$

$$\frac{5}{10^3} = 0{,}005, \qquad \frac{72}{10^4} = 0{,}0072.$$

Il résulte immédiatement de tout ceci que pour chaque

nombre supérieur à 1, la règle est immédiatement applicable ; elle ne l'est pas immédiatement pour un nombre décimal inférieur à 1 : il faut d'abord ajouter des zéros sur la gauche du numérateur.

La partie entière d'un nombre décimal est représentée par le nombre entier qui précède la virgule, et la partie décimale s'obtient en remplaçant, dans l'écriture, ce nombre par 0; en d'autres termes, étant donné un nombre décimal quelconque, on obtient la partie entière en supprimant sur la droite du numérateur autant de chiffres qu'il y a de zéros au dénominateur; cette partie supprimée, prise elle-même pour numérateur, donne la partie décimale ou fractionnaire du nombre.

Ceci résulte évidemment de ce qui précède. Mais on peut le démontrer plus directement, en s'appuyant toujours sur les lois de la numération. Soit, en effet, le nombre décimal $\frac{326749108}{100000}$; le numérateur est égal à

$$3267 \times 10^5 + 49108;$$

en divisant par 10^5 on a

$$\frac{3267 \times 10^5 + 49108}{10^5}$$

ou $3267 + \frac{49108}{100000}$. (Voir l'addition des nombres fractionnaires.)

Un raisonnement analogue peut se répéter dans chaque cas et conduit évidemment à la règle donnée plus haut.

Pour lire un nombre décimal, on énonce d'abord la partie entière, à la façon ordinaire, en faisant suivre le nom de ce nombre du mot unité, on énonce ensuite la partie décimale, comme si c'était un nombre entier, en faisant suivre du nom des unités décimales représentées par le dernier chiffre non nul.

Ainsi le nombre

3267,49108

se lit *trois mille deux cent soixante-sept unités, quarante-neuf mille cent huit cent-millièmes;*
le nombre 0,0235 se lit *deux cent trente-cinq dix-millièmes;* le nombre 0,00432700 se lit *quatre mille trois cent vingt-sept millionièmes.*

Le nom de chaque unité décimale se déduit du nom de l'unité ordinaire de même ordre qu'elle en faisant suivre ce nom de la terminaison *ième.*

Quand il n'y a pas d'unités ordinaires dans un nombre décimal, c'est-à-dire quand ce nombre est plus petit que 1, on ne fait aucunement mention de la partie entière.

Pour écrire un nombre décimal dicté, on écrit d'abord la partie entière à la façon habituelle, on la fait suivre d'une virgule, puis on écrit la partie décimale comme si c'était un nombre entier, en ayant soin de remplacer par des zéros les unités de chaque ordre décimal qui manque. Ainsi le nombre dicté *quatre mille trois cent vingt-sept millionièmes* s'écrit 0,004327 ; car aucune partie entière n'étant énoncée, cette portion du nombre doit être figurée par un 0; d'autre part, les unités de l'ordre décimal exprimé étant du sixième ordre, la partie décimale contient deux 0 au début.

On ne change pas la valeur d'un nombre décimal, en ajoutant à droite ou à gauche de ce nombre autant de zéros que l'on veut.

Car, en procédant ainsi, on n'ajoute aucune unité d'un ordre déterminé au nombre considéré, et chacun de ses chiffres continue à représenter le même nombre.

On pourra donc ainsi faire représenter à plusieurs nombres décimaux des unités du même ordre, en ajoutant à la droite de ceux qui contiennent le moins de chiffres décimaux autant de zéros qu'il en faut pour qu'ils aient le même nombre de chiffres décimaux que celui qui en a le plus

Ainsi 0,5, 0,072, 0,004327 peuvent s'écrire
0,500000, 0,072000, 0,004327.

Au fond, ceci revient à la réduction au même dénominateur, car les premiers nombres sont

$$\frac{5}{10}, \frac{72}{1000}, \frac{4327}{1000000},$$

et les seconds,

$$\frac{500000}{1000000}, \frac{72000}{1000000}, \frac{4327}{1000000}.$$

Pour multiplier un nombre décimal par une puissance de 10, *on déplace la virgule vers la droite d'autant de rangs qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette puissance. Pour diviser un nombre décimal par une puissance de* 10, *on déplace la virgule d'autant de rangs vers la gauche qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette puissance.*

Car, en déplaçant la virgule d'un rang vers la droite, chaque chiffre représente des unités dix fois plus fortes ; le nombre est donc ainsi multiplié par 10. En déplaçant la virgule d'un rang vers la gauche, chaque chiffre représente des unités dix fois plus petites ; le nombre est donc ainsi divisé par 10.

S'il n'y a pas assez de chiffres pour opérer le déplacement complet, on complète le nombre par des zéros placés à droite ou à gauche.

118. **Addition des nombres décimaux.** — Étant donnés plusieurs nombres décimaux, 45,721, 3081,22, 0,085674, 0,0293, on peut, en complétant certains d'entre eux par des zéros, les amener à représenter tous, abstraction faite de la virgule, des unités d'un même ordre décimal, le plus élevé de ceux qui figurent dans les nombres proposés. C'est ainsi que les nombres donnés s'écrivent d'abord 45,721000, 3081,220000, 0,085674 et 0,029300.

Si l'on supprime la virgule dans chacun d'eux, ils représenteront les nombres précédents, à condition de penser que le dernier chiffre de chacun représente des unités du

sixième ordre décimal. Les nombres entiers ainsi obtenus indiquent combien les nombres proposés contiennent de millionièmes.

La somme de ces nombres indiquera combien il y a d'unités du sixième ordre décimal dans tous les nombres donnés, pris à la fois ; elle représentera donc, sous forme entière, la somme des nombres décimaux donnés. Il n'y aura plus qu'à indiquer, à l'aide de la virgule, que le dernier chiffre à droite représente des millionièmes. De là, la règle suivante :

Règle. — *Pour ajouter plusieurs nombres décimaux les uns aux autres, on les écrit les uns au-dessous des autres, en plaçant dans une même colonne les unités d'un même ordre, on fait abstraction de la virgule, et on fait la somme comme si les nombres étaient entiers ; puis, le résultat obtenu, on met la virgule à droite de la colonne des unités.*

L'exemple précédent conduit à l'opération

45,721000		45,721
3081,220000		3081,22
0,085674	ou	0,085674
0,029300		0,0293
3127,055974		3127,055974,

car il est évident que les zéros ajoutés, ne servant à rien, peuvent être omis.

Tout ce que nous avons dit revient au fond à la réduction des nombres donnés au même dénominateur, puis à leur addition, d'après la règle d'addition des nombres fractionnaires.

119. Soustraction des nombres décimaux. — En raisonnant de la même manière, ou en réduisant deux nombres donnés au même dénominateur, on est conduit à effectuer la soustraction de deux nombres décimaux comme si

c'étaient des nombres entiers; le résultat obtenu, on rétablit la virgule à droite de la colonne des unités.

Exemple : Retrancher 0,085674 de 45,721.

On complète le second nombre avec trois 0 placés à sa droite et on a l'opération

$$\begin{array}{r} 45{,}721000 \\ 0{,}085674 \\ \hline 45{,}635326 \end{array}$$

RÈGLE. — *Pour retrancher l'un de l'autre deux nombres décimaux, on ajoute des zéros à droite du nombre qui a le moins de chiffres décimaux, jusqu'à ce qu'il en ait autant que l'autre ; on fait la différence comme si les deux nombres étaient entiers, et on met au résultat une virgule à droite de la colonne des unités.*

120. **Multiplication des nombres décimaux.** — On applique la règle de multiplication des nombres fractionnaires. Ainsi pour avoir le produit de 0,0753 par 26,24, on revient à la représentation première de ces nombres et l'on a $\frac{753}{10^4}$ et $\frac{2624}{10^2}$.

Le produit s'obtient alors en effectuant le produit des numérateurs, et le produit des dénominateurs, ce qui se fait en ajoutant les exposants des deux puissances de 10. On a ainsi

$$\frac{1975872}{10^6} = 1{,}975872.$$

Il est facile maintenant de supprimer la représentation intermédiaire et de formuler la règle.

RÈGLE. — *Pour obtenir le produit de deux nombres décimaux, on fait le produit des nombres entiers obtenus, en faisant abstraction de la virgule dans chacun d'eux, et on sépare, à droite de ce nombre, par une virgule, autant de chiffres qu'il*

y en a dans les parties décimales du multiplicande et du multiplicateur réunis.

121. **Division des nombres décimaux.** — On s'appuie encore ici sur la division des nombres fractionnaires quelconques.

Soit, par exemple, à diviser le nombre 5,841 par 32,00849 ; ces deux nombres peuvent s'écrire

$$\frac{5841}{1000} \quad \text{et} \quad \frac{3200849}{100000};$$

en les réduisant au même dénominateur, on a les deux nombres

$$\frac{584100}{100000} \quad \text{et} \quad \frac{3200849}{100000}.$$

Si l'on multiplie maintenant le dividende par le diviseur renversé, on a le quotient exact des deux nombres,

$$\frac{584100}{3200849}.$$

Ce nombre fractionnaire est irréductible et, pour le moment, il n'y a rien de plus à dire sur ce cas particulier. Nous pouvons cependant énoncer la loi suivante :

Le quotient exact de deux nombres décimaux s'obtient en complétant par des zéros celui des deux qui a le moins de chiffres décimaux, et en formant un nombre fractionnaire avec ces deux nombres rendus entiers par la suppression de la virgule, le dividende étant placé en haut.

Il nous reste maintenant à évaluer, sinon exactement, au moins approximativement, de pareils quotients à l'aide des nombres décimaux.

122. **Valeurs approchées d'un quotient.** — Tous les nombres que nous avons rencontrés jusqu'ici se présentent sous forme de nombres entiers ou de quotients de nombres entiers.

Si la division indiquée par un nombre fractionnaire se fait exactement, le nombre est représentable par un nombre entier, et nous n'avons rien à en dire, sinon que ce nombre fractionnaire était susceptible de simplification.

Examinons le cas où le nombre $\frac{A}{B}$ indique une division donnant un reste. Dans ce cas, nous allons chercher combien de fois une fraction déterminée est contenue dans le quotient, et si elle n'est pas contenue un nombre exact de fois dans ce quotient, le plus grand nombre de fois qu'elle y est contenue.

Cherchons d'abord combien de fois une fraction de la forme $\frac{1}{n}$ est contenue dans $\frac{A}{B}$. Les nombres fractionnaires ayant pour dénominateur n, forment la suite croissante

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots\ldots, \frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}, \ldots\ldots;$$

comme les nombres de cette suite augmentent au-delà de toute limite, le nombre $\frac{A}{B}$ est égal à l'un d'eux, ou compris entre deux d'entre eux, $\frac{p}{n}$ et $\frac{p+1}{n}$, de sorte que, dans tous les cas, on a $\frac{p}{n} \leqslant \frac{A}{B} < \frac{p+1}{n}$,

pour une certaine valeur de p. Le nombre entier p est justement le nombre cherché, et nous obtiendrons ce nombre en multipliant les trois nombres qui figurent dans ces inégalités par n; nous aurons ainsi

$$p \leqslant \frac{A \times n}{B} < p + 1,$$

inégalités qui nous montrent que le nombre p est le quotient, à une unité près, de $A \times n$ par B; nous sommes donc ramené, pour le calcul de p, à une division ordinaire.

Les deux nombres $\frac{p}{n}$ et $\frac{p+1}{n}$ diffèrent de $\frac{A}{B}$ d'un

nombre moindre que $\frac{1}{n}$ et se nomment les *valeurs approchées de* $\frac{A}{B}$, *par défaut ou par excès, à* $\frac{1}{n}$ *près.*

Il peut se faire, comme nous l'avons vu, que la valeur approchée par défaut, $\frac{p}{n}$, soit juste égale à $\frac{A}{B}$. Cela arrivera sûrement en particulier pour les valeurs approchées par défaut à $\frac{1}{B}$ près ou $\frac{1}{kB}$ près, k étant un entier quelconque, et n'arrivera que pour celles-là, si $\frac{A}{B}$ est irréductible.

On peut aussi chercher des valeurs approchées à $\frac{\alpha}{\beta}$ près : il suffit de trouver un nombre entier p vérifiant les inégalités

$$p\frac{\alpha}{\beta} \leqslant \frac{A}{B} < (p+1)\frac{\alpha}{\beta},$$

ou, en multipliant par $\frac{\beta}{\alpha}$, les inégalités

$$p \leqslant \frac{A\beta}{B\alpha} < p+1.$$

Ceci nous montre que p est le quotient, à une unité près, de $A\beta$ par $B\alpha$, et nous sommes encore ramené à une division ordinaire.

Les calculs que nous avons indiqués ne dépendent que de la valeur de $\frac{A}{B}$ et non de sa forme : $\frac{A}{B}$ peut donc être réduit ou non à sa plus simple expression.

Cela posé, considérons une suite infinie de nombres entiers croissants,

$$n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k, \ldots\ldots,$$

par exemple la suite naturelle des nombres entiers, ou celle des nombres impairs, ou les multiples de 5, — d'une manière générale, toute suite croissante et illimitée de nombres entiers ; — formons la suite des valeurs approchées

par défaut, à $\frac{1}{n_1}$, $\frac{1}{n_2}$, ..., $\frac{1}{n_k}$, ... près,

$$\frac{p_1}{n_1}, \frac{p_2}{n_2}, \ldots\ldots, \frac{p_k}{n_k}, \ldots\ldots,$$

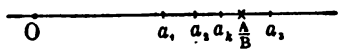
ou la suite des valeurs approchées par excès,

$$\frac{p_1+1}{n_1}, \frac{p_2+1}{n_2}, \ldots\ldots, \frac{p_k+1}{n_k}, \ldots\ldots,$$

ou toute autre suite contenant ces nombres mélangés d'une façon arbitraire, le premier étant l'une des deux valeurs approchées à $\frac{1}{n_1}$ près, le second, l'une des valeurs approchées à $\frac{1}{n_2}$ près, ..., le k^e, l'une des valeurs approchées à $\frac{1}{n_k}$ près; et soit

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k, \ldots\ldots$$

cette suite. Le nombre $\frac{A}{B}$ étant toujours compris entre les deux valeurs approchées qui répondent à l'un des entiers n, diffère de a_k d'un nombre moindre que $\frac{1}{n_k}$, en plus ou en moins. Or le nombre entier n_k dépasse tout nombre entier donné, quand k est assez grand; donc, pour les mêmes valeurs de k, le nombre $\frac{1}{n_k}$ est inférieur à un nombre fractionnaire quelconque, ε, donné à l'avance. Il en résulte que les longueurs qui sont mesurées par les nombres $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k, \ldots\ldots$, ont des extrémités aussi voisines que l'on veut de l'extrémité de la longueur mesurée par $\frac{A}{B}$. On exprime cette propriété remarquable de la suite des a_k, en disant que cette suite a pour *limite* le nombre $\frac{A}{B}$. On dit de même que les longueurs a_k ont pour limite la lon-



gueur $\frac{A}{B}$ et que leurs extrémités ont pour *point-limite* l'extrémité de la longueur $\frac{A}{B}$. Cette notion nous suffira pour le moment ; mais elle sera précisée plus tard. (Voir le chapitre sur les nombres incommensurables.)

Nous dirons qu'un nombre indéterminé, qui peut prendre toutes les valeurs d'un ensemble donné, est un nombre *variable*. C'est ainsi que nous dirons que le nombre a_k est variable avec son indice, car il peut prendre toutes les valeurs de la suite précédente, et alors nous exprimerons autrement l'idée de limite : nous dirons que le nombre $\frac{A}{B}$ est la limite du nombre variable a_k, quand l'indice k augmente indéfiniment, et nous écrirons

$$\operatorname*{Lim.}_{k=\infty} a_k = \frac{A}{B}.$$

Cette égalité se lit : *limite de* a_k, *pour* k *égale infini, égale* $\frac{A}{B}$.

123. Réduction d'un nombre fractionnaire en décimales. — Prenons maintenant comme suite illimitée de nombres entiers croissants les diverses puissances de 10,

$$1, 10, 10^2, \ldots\ldots, 10^k, \ldots\ldots$$

Alors les valeurs approchées de $\frac{A}{B}$, telles que nous les avons calculées dans le paragraphe précédent, seront des nombres décimaux, $\frac{p_k}{10^k}$ et $\frac{p_k+1}{10^k}$; chacun de ces nombres diffère de $\frac{A}{B}$ d'un nombre moindre que $\frac{1}{10^k}$ ou qu'une unité du k^e ordre décimal. Pour les calculer, nous suivrons la règle donnée antérieurement : nous multiplierons A par 10^k, et nous prendrons le quotient à une unité près de ce produit par B ; ce quotient sera le nombre entier p_k.

Dans la pratique, pour obtenir la valeur approchée par défaut $\frac{p_k}{10^k}$, on divise le nombre A par le nombre B ; une fois parvenu au reste ordinaire, le quotient obtenu est la valeur approchée par défaut du quotient $\frac{A}{B}$, à une unité près ; pour obtenir la valeur approchée par défaut à un dixième près, on ajoute ensuite un 0 à droite du reste, afin d'obtenir un nouveau dividende partiel, et l'on calcule un nouveau chiffre au quotient ; cette opération revient évidemment à la multiplication de A par 10 et donne le plus grand nombre de dixièmes contenus dans le quotient $\frac{A}{B}$. Si l'on veut avoir la valeur approchée par défaut à un centième près, on ajoutera encore un zéro à droite du nouveau reste et l'on calculera un chiffre de plus au quotient ; il est évident que cette façon d'agir revient à la multiplication de A par 100 et à la division, à une unité près, de ce produit par B. Et ainsi de suite. Dans chaque cas, on obtiendra la valeur approchée elle-même, en plaçant une virgule à droite du chiffre qui figure les unités du quotient.

Exemples. — Trouver à un millième près le quotient de 795 *par* 48.

On divise 795 par 48, à la façon ordinaire, et on forme trois nouveaux dividendes partiels, quand l'opération ordinaire est terminée, en ajoutant successivement un zéro à la droite des trois restes qui viennent ensuite.

795	48
315	16,562
270	
300	
120	
24	

Ceci revient, comme nous l'avons dit, à la multiplication du dividende par mille ; le quotient obtenu sera divisé par mille, en plaçant une virgule à droite du chiffre qui termine le quotient ordinaire.

L'opération est faite à côté.

Trouver le quotient à un dix-millième près de 32,728 *par* 0,9621.

D'après ce que nous avons vu antérieurement, le quotient exact de ces deux nombres est le quotient de 327280 par 9621. Il suffit donc d'appliquer la même méthode et de poursuivre l'opération jusqu'à ce que l'on ait obtenu quatre décimales, c'est-à-dire quatre chiffres après celui qui termine le quotient ordinaire, à une unité près ; cela exige la formation de quatre nouveaux dividendes partiels, à l'aide de zéros abaissés successivement. L'opération est faite à côté.

```
327280 | 9621
 38650 |------
  16600  34,0172
   69790
    24430
     5188
```

Nous sommes donc conduit, par ce procédé, à une opération indéfinie que nous pourrons continuer tant qu'il nous plaira, en abaissant un zéro à chaque fois pour former de nouveaux dividendes partiels. Si nous arrêtons cette opération, lorsqu'il y a un, deux, trois, ... chiffres décimaux au quotient, nous aurons les valeurs approchées par défaut à un dixième, un centième, un millième,... près. En ajoutant à chaque fois une unité au dernier chiffre décimal écrit, on obtient les valeurs approchées par excès. Cette opération s'appelle la *réduction d'un nombre fractionnaire en nombre décimal* ou *en décimales*.

Elle jouit des propriétés suivantes :

1° Les résultats sont les mêmes si l'on multiplie ou si l'on divise, quand cela se peut, les deux nombres A et B par le même nombre ; car ces opérations n'altèrent pas la valeur du nombre $\frac{A}{B}$.

2° Chaque valeur approchée par défaut se déduit de la précédente, en ajoutant un nouveau chiffre décimal, qui peut être nul.

3° Les valeurs approchées par défaut successives forment

une suite croissante (*); elles augmentent à chaque fois de moins d'une unité de l'ordre décimal du dernier chiffre précédemment écrit.

4° Pour déduire une valeur approchée par excès de celle qui la précède, on retranche à celle-ci une unité du dernier ordre décimal écrit et on lui ajoute au moins une, au plus dix unités de l'ordre décimal suivant. Les valeurs approchées par excès vont donc en diminuant ou restent constantes pendant un certain temps, ou restent toujours les mêmes (**).

Exemple. — Le développement décimal 0,50400999504... donne pour suite des valeurs approchées par défaut 0,5 ; 0,50 ; 0,504 ; 0,5040 ; 0,50400 ; 0,504009 ; ....., et pour suite des valeurs approchées par excès 0,6 ; 0,51 ; 0,505 ; 0,5041 ; 0,50401 ; 0,504010 ;..... Les valeurs approchées par excès que fournit le développement 0,999..... sont toutes égales à 1. Toutefois, il est bon de remarquer que ce développement décimal ne se rencontre dans aucune division.

5° Toute valeur approchée par excès surpasse la valeur approchée par défaut qui lui correspond d'une unité du dernier ordre décimal écrit.

6° De toute valeur approchée par défaut, on déduit les valeurs approchées par défaut qui précèdent celle-ci, en supprimant des chiffres décimaux sur la droite du nombre décimal considéré.

7° Si l'on porte sur une même droite, dans un même sens et à partir d'un même point, des longueurs mesurées par ces diverses valeurs approchées et par le nombre $\frac{A}{B}$, on se rend mieux compte des propriétés signalées, et l'on voit que l'extrémité de la longueur $\frac{A}{B}$ est le seul point qui

(*) On appelle *suite croissante* une suite dans laquelle les termes ne vont jamais en diminuant ; il peut arriver du reste que deux ou plusieurs termes consécutifs soient égaux.

(**) Ce dernier résultat ne se rencontre dans aucun développement décimal provenant d'une division.

tombe entre les extrémités des longueurs approchées par défaut et des longueurs approchées par excès. Ce point est le point-limite commun à ces deux ensembles de points (*).

Il nous reste à voir maintenant dans quels cas le développement en décimales se termine, dans quels cas il est illimité, et quelle est alors sa loi de formation.

124. Nombres fractionnaires donnant naissance à des nombres décimaux limités ou à des nombres décimaux illimités.

THÉORÈME. — *Lorsqu'un nombre fractionnaire irréductible donne naissance à un nombre décimal limité, son dénominateur ne renferme pas d'autres facteurs premiers que* 2 *et* 5, *et réciproquement.*

Supposons d'abord qu'un nombre fractionnaire soit égal à un nombre décimal ; alors il sera de la forme $\frac{A}{10^n}$, et pour obtenir sa valeur réduite il n'y aura qu'à supprimer au numérateur et au dénominateur les facteurs qui leur sont communs ; cette opération n'introduit aucun nouveau facteur premier au dénominateur, et celui du nombre obtenu en dernier lieu ne peut contenir que les facteurs premiers qui se trouvaient déjà en bas, c'est-à-dire 2 et 5 ou 2 ou 5.

Réciproquement, si cela est, le nombre irréductible donné, $\frac{a}{b}$, sera de la forme $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^n 5^p}$; si les deux nombres n et p sont égaux, on a $\frac{a}{b} = \frac{a}{10^n}$, et le nombre donné est un nombre décimal ; sinon, supposons, pour fixer les idées, p supérieur à n ; en multipliant le numérateur et le dénominateur par 2^{p-n}, nous aurons

(*) La plupart des propriétés signalées s'appliquent à un développement quelconque en décimales, quelle que soit sa somme, pourvu qu'on définisse les valeurs approchées par défaut et par excès à l'aide des n premières décimales.

$\frac{a}{b} = \frac{a \times 2^{p-n}}{2^p 5^p} = \frac{a \times 2^{p-n}}{10^p}$; le nombre $\frac{a}{b}$ est donc encore égal à un nombre décimal, que l'on obtiendra en cherchant sa valeur approchée par défaut, à $\frac{1}{10^p}$ près ; les valeurs approchées suivantes seront toutes égales à celle-ci, car à partir de ce moment, les restes successifs de la division indéfinie sont tous nuls et les nouveaux chiffres décimaux nuls aussi.

Exemples :

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{2^3} = \frac{5^4}{2^3 5^3} = \frac{625}{1000} = 0{,}625;$$

$$\frac{7}{8.5} = \frac{7 \times 5^2}{2^3 5^3} = \frac{175}{1000} = 0{,}175.$$

CONSÉQUENCE. — *Lorsqu'au dénominateur d'un nombre fractionnaire irréductible, il y a d'autres facteurs premiers que* 2 *et* 5, *ce nombre donne naissance à un nombre décimal illimité.*

Ex. : $\frac{2}{3}, \frac{7}{15}, \frac{19}{14}$.

Nous allons montrer que, dans ce cas, le développement est *périodique*, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang décimal, les mêmes chiffres se reproduisent indéfiniment et dans le même ordre.

En effet, à partir du reste ordinaire, tous les dividendes partiels se forment de la même manière, — en ajoutant un zéro à la droite de chaque reste partiel obtenu ; or, tous ces restes partiels sont inférieurs au diviseur, b, et se trouvent parmi les nombres 1, 2, ..., $b-1$; donc leur nombre est limité, et l'on finira toujours, après un certain nombre d'opérations, par retomber sur un reste déjà obtenu. A partir de ce moment, les mêmes opérations se reproduisent indéfiniment et l'on trouve les mêmes restes et au quotient les mêmes chiffres.

Exemples :

$$\frac{5}{6} = 0,83333.....,$$

$$\frac{10}{13} = 0,76923076923076.....,$$

$$\frac{131}{88} = 1,4886363.....$$

Dans un nombre décimal périodique, on appelle *période* la partie décimale qui se reproduit identiquement et indéfiniment. Quand on cite cette période, on la regarde comme un nombre entier : dans les exemples précédents, les périodes sont 3, 769230 et 63.

Un nombre décimal est dit *périodique simple*, quand la période commence immédiatement après la virgule. — Le second des trois nombres donnés comme exemples, est périodique simple.

Un nombre décimal est dit *périodique mixte*, quand la période ne commence pas de suite après la virgule. — La partie décimale qui précède la période est la *partie non périodique*. — Dans le premier et le dernier des exemples précédents, les parties non périodiques sont 8 et 488.

La partie entière d'un nombre fractionnaire n'intervient pas dans ce qui nous reste à dire sur les nombres décimaux. Nous ne considérons donc que des nombres inférieurs à 1, et des fractions décimales, ayant pour partie entière 0.

La fraction ordinaire qui donne naissance à une fraction décimale périodique est dite *fraction génératrice* de celle-ci.

Exemples. — $\frac{5}{6}$ est la fraction génératrice de 0,8333..., et $\frac{10}{13}$, la fraction génératrice de 0,769230769230.....

La fraction génératrice d'une fraction décimale périodique est la limite des fractions décimales obtenues en prenant un, deux, trois, ... chiffres décimaux. Ainsi $\frac{5}{6}$ est la li-

mite de la suite

$$0{,}8, \quad 0{,}83, \quad 0{,}833, \quad 0{,}8333, \quad \ldots\ldots;$$

car la différence entre le nombre $\frac{5}{6}$ et le terme de rang n est inférieure à $\frac{1}{10^n}$ (n° 123) ; il en est de même *a fortiori* de la différence entre $\frac{5}{6}$ et un terme quelconque de la suite qui vient après le rang n. Si donc on prend n assez grand pour que $\frac{1}{10^n}$ soit inférieur à un nombre fractionnaire choisi arbitrairement, ε, tous les termes de la suite qui viennent après le n^e différeront de $\frac{5}{6}$ d'un nombre moindre que ε; donc, par définition de la limite, $\frac{5}{6}$ est la limite de cette suite (*).

125. Fraction génératrice d'une fraction décimale périodique donnée. — Considérons, en premier lieu, une fraction décimale périodique simple, et prenons, par exemple, la fraction

$$0{,}597597597\ldots\ldots,$$

sur laquelle nous allons faire un raisonnement applicable à un exemple quelconque.

Nous allons montrer d'abord que la suite des fractions décimales

$$0{,}5, \quad 0{,}59, \quad 0{,}597, \quad 0{,}5975, \quad \ldots\ldots$$

a une limite.

Pour cela, nous prendrons dans cette suite les termes qui contiennent un nombre exact de périodes, c'est-à-dire les termes de rangs $3, 6, 9, \ldots\ldots, 3n, \ldots\ldots$ Le n^e de ces termes, celui qui contient n périodes, représente des

(*) Le nombre ε étant choisi arbitrairement, est naturellement aussi petit que l'on veut.

unités de l'ordre $\frac{1}{10^{3n}}$. Chaque fois qu'on avance d'un rang dans cette nouvelle suite, on ajoute 597 unités du dernier ordre décimal écrit, en sorte que les termes que nous envisageons seuls peuvent être représentés par

$$\frac{597}{1000},\quad \frac{597}{1000}+\frac{597}{1000^2},\quad \frac{597}{1000}+\frac{597}{1000^2}+\frac{597}{1000^3},\ldots$$

$$\ldots\ldots\frac{597}{1000}+\frac{597}{1000^2}+\ldots\ldots+\frac{597}{1000^n},\ldots\ldots$$

Désignons le n^e de ces termes par A_n; nous aurons

$$A_n=\frac{597}{1000}+\frac{597}{1000^2}+\frac{597}{1000^3}+\ldots\ldots+\frac{597}{1000^n},$$

et si nous multiplions ce nombre par 1000, nous obtiendrons :

$$1000A_n=597+\frac{597}{1000}+\frac{597}{1000^2}+\ldots\ldots+\frac{597}{1000^{n-1}};$$

nous allons obtenir une nouvelle expression du nombre A_n en retranchant de cette égalité celle qui définit le nombre A_n; nous aurons ainsi $999A_n=597-\frac{597}{1000^n}$. Nous voyons donc que le nombre A_n a pour valeur

$$A_n=\frac{597}{999}-\frac{597}{999\times 1000^n};$$

par conséquent la différence entre $\frac{597}{999}$ et A_n est donnée par l'égalité

$$\frac{597}{999}-A_n=\frac{597}{999\times 1000^n}.$$

Or le second membre de cette égalité devient aussi petit que l'on veut, quand n grandit au-delà de toute limite; donc le nombre variable A_n a pour limite $\frac{597}{999}$.

Si maintenant nous revenons à la première suite, celle qui contient tous les nombres décimaux déduits du nombre

décimal périodique simple donné, nous constatons que les termes de cette suite vont en croissant, et qu'il y a, quelque grand que soit n, toujours des termes de la forme précédente qui viennent après ceux que l'on envisage ; donc tous les nombres de cette suite sont inférieurs à $\frac{597}{999}$. De plus, lorsqu'on s'éloigne de plus en plus dans cette suite, les termes finissent par dépasser tel des nombres A_n que l'on veut envisager ; donc ces termes finissent par être aussi voisins de $\frac{597}{999}$ que l'on veut ; ils ont donc pour limite le nombre $\frac{597}{999}$.

Il suffit de généraliser par la pensée le raisonnement que l'on vient de faire sur un exemple particulier, pour être conduit au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute fraction décimale périodique simple a pour limite la fraction ordinaire que l'on obtient en prenant pour numérateur le nombre entier formé par une période unique et pour dénominateur un nombre composé d'autant de* 9 *qu'il y a de chiffres dans la période.*

REMARQUE. — La fraction ordinaire que l'on obtient ainsi ne peut dépasser l'unité; elle est en général inférieure à 1; elle ne peut être égale à 1 que si la période est égale à 9 ; dans ce cas, la fraction décimale périodique simple donnée est

$$0,9999\ldots\ldots ;$$

la limite de tous les nombres décimaux que l'on en déduit est $\frac{9}{9}$ ou 1.

Nous allons montrer maintenant que, sauf ce dernier cas, la fraction ordinaire obtenue en appliquant le théorème énoncé précédemment est la fraction génératrice de la fraction décimale périodique simple donnée.

En effet, dans tout autre cas que le cas exceptionnel signalé, la fraction obtenue est inférieure à 1 ; si donc on la convertit en décimales, elle ne peut donner naissance qu'à une fraction décimale limitée ou illimitée ; mais dans les deux cas, le numérateur successivement multiplié par 10, 100, 1000, ..., et divisé ensuite par le dénominateur, donne le premier, les deux premiers, les trois premiers, ... chiffres décimaux ; si la fraction décimale était limitée, on finirait par ne plus trouver que le chiffre zéro au quotient. C'est la seule différence entre ce cas et l'autre.

Revenons alors au nombre $\frac{597}{999}$, multiplions le numérateur par 1000 et divisons le produit par le dénominateur ; nous aurons ainsi les trois premiers chiffres décimaux. Mais le produit de 597 par 1000 est égal à $597(999+1)$ ou $597 \times 999 + 597$; ce qui nous montre que le quotient est 597 et le reste 597. Ce reste multiplié par 1000 et divisé par 999 donnera les trois chiffres décimaux suivants ; on obtient donc ainsi 597 pour les nouveaux chiffres décimaux. Et ainsi de suite.

Théorème. — *La fraction génératrice d'une fraction décimale périodique simple donnée, autre que*

0,9999.....,

s'obtient en divisant le nombre entier formé par la période par un nombre entier formé d'autant de 9 *qu'il y a de chiffres dans cette période.*

Le dénominateur d'une fraction génératrice de ce genre, étant de la forme $10^n - 1$, ne contient aucun des facteurs premiers du nombre 10. Si donc on réduit une pareille fraction à sa plus simple expression, le dénominateur final ne contiendra ni le facteur 2 ni le facteur 5 ; d'où, le théorème :

Théorème. — *Le dénominateur d'une fraction irréductible,*

génératrice d'une fraction périodique simple, ne contient ni le facteur **2** *ni le facteur* **5**.

126. Fraction génératrice d'une fraction décimale périodique. — Suite.

Nous allons étudier maintenant le cas d'une fraction décimale périodique mixte donnée.

Pour faire cette étude, nous nous appuierons sur les deux propriétés suivantes, relatives aux limites, et qui sont presque évidentes :

1° *Si l'on considère deux suites infinies de nombres fractionnaires ou entiers, et tels que les termes de l'une soient respectivement égaux aux termes correspondants de l'autre, multipliés par un même nombre, fractionnaire ou entier, ces deux suites ont ou n'ont pas des limites en même temps. Si ces limites existent, celle de la première est le produit de celle de la seconde par le multiplicateur employé.*

Soit, en effet,

$$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n, \ldots\ldots$$

une suite infinie de nombres fractionnaires ou entiers ; multiplions tous les nombres de cette suite par un nombre fractionnaire ou entier, m ; nous aurons une nouvelle suite,

$$B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n, \ldots\ldots$$

Si la première a une limite, A, c'est que la différence entre A et A_n est moindre, à partir d'un certain rang, p, qu'un nombre choisi arbitrairement, ε ; alors la différence entre mA et mA_n sera moindre, à partir du même rang, que $m\varepsilon$; or ε est un nombre quelconque, donc $m\varepsilon$ est aussi un nombre quelconque, et, par suite, le nombre B_n ou mA_n a pour limite le nombre mA quand n grandit au delà de toute limite.

Si l'on admet que c'est la seconde suite qui a une limite, un raisonnement complètement analogue montre que la première a pour limite $\frac{B}{m}$.

2° *Si l'on suppose que d'une suite infinie de nombres fractionnaires ou entiers,*

$$A_1,\ A_2,\ \ldots\ldots,\ A_n,\ \ldots\ldots,$$

on déduit une seconde suite,

$$B_1,\ B_2,\ \ldots\ldots,\ B_n,\ \ldots\ldots$$

en ajoutant à chacun des termes de la première un nombre déterminé, m, *fractionnaire ou entier, les deux suites ont des limites ou n'en ont pas en même temps. Si les limites existent, celle de la seconde est égale à celle de la première, augmentée de* m.

Dire que la première suite a une limite, A, c'est dire qu'à partir d'un certain rang, p, la différence entre A et A_n est moindre qu'un nombre, ε, choisi arbitrairement. Or la différence entre $A + m$ et B_n est égale à la précédente ; donc B_n a pour limite $A + m$, quand n augmente indéfiniment.

Réciproquement, si l'on admet que la seconde suite a une limite, B, on démontre par un raisonnement semblable au précédent que la première suite a pour limite $B - m$.

Cela posé, soit

$$0{,}86597597597\ldots\ldots$$

une fraction décimale périodique mixte ; et considérons la suite infinie

$$0{,}8,\quad 0{,}86,\quad 0{,}865,\quad 0{,}8659,\quad 0{,}86597,\quad \ldots\ldots;$$

nous allons d'abord montrer que cette suite a une limite et trouver cette limite. Pour cela, nous remarquons qu'on peut, au commencement de cette suite, supprimer autant de termes que l'on veut, sans que la limite soit altérée, s'il y en a une, sans qu'une limite apparaisse, s'il n'y en a pas primitivement ; cela résulte de l'idée même de limite, et de la définition, qui est indépendante des premiers termes, si grand que soit leur nombre.

Supprimons alors les deux premiers termes de la suite, multiplions tous les autres par 100, et retranchons de tous

ces nouveaux nombres le nombre 86 ; nous aurons les trois suites :

0,865,	0,8659,	0,86597,	0,865975, ...,
86,5,	86,59,	86,597,	86,5975, ...,
0,5,	0,59,	0,597,	0,5975, ...,

qui ont des limites ou qui n'en ont pas en même temps. Mais, d'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent, la dernière suite provient d'une fraction périodique simple et a pour limite le nombre $\frac{597}{999}$. La seconde suite a donc pour limite le nombre $86 + \frac{597}{999}$, et la première, une limite 100 fois moindre, $\frac{86}{100} + \frac{597}{99900}$. Or ce dernier nombre peut s'écrire

$$\frac{86 \times 999 + 597}{99900}$$

ou $\frac{86(1000-1)+597}{99900}$ ou $\frac{86000+597-86}{99900} = \frac{86511}{99900}$.

En généralisant ce résultat, nous sommes conduit au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute fraction périodique mixte donne naissance à un nombre décimal variable dont le nombre des chiffres décimaux augmente indéfiniment et qui a pour limite une fraction ordinaire dont le numérateur s'obtient en retranchant du nombre formé par la partie non périodique, suivie d'une période, la partie non périodique, et dont le dénominateur est un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique.*

Si la période ne se compose que du chiffre 9, la limite s'écrit plus simplement. Ainsi le nombre 0,86999..... a une limite 100 fois moindre que le nombre 86,999....., et

ce dernier a pour limite $86 + \frac{9}{9}$ ou 87 ; le premier nombre a donc pour limite $\frac{87}{100}$ ou 0,87. Mais la règle donnée plus haut peut être appliquée et donne le nombre

$$\frac{869 - 86}{900} = \frac{783}{900},$$

qui est égal à 0,87.

En laissant de côté ce cas exceptionnel, il est facile de voir que la fraction limite obtenue par le procédé indiqué donne naissance au nombre décimal périodique mixte qui l'a fournie, quand on la développe en décimales.

En effet, pour développer le nombre $\frac{86511}{99900}$ en décimales, il suffit de développer le nombre 100 fois plus grand, $\frac{86511}{999}$, et de reculer ensuite la virgule de deux rangs vers la gauche. Or ce nombre peut s'écrire $\frac{86 \times 1000 + 511}{999}$ ou $\frac{86(999 + 1) + 511}{999} = \frac{86 \times 999 + 597}{999}$.

La partie entière de ce nombre est 86 et la partie décimale est $\frac{597}{999}$. Or cette dernière donne naissance à la fraction décimale périodique simple 0,597597597..... Donc le nombre $\frac{86511}{999}$ donne naissance au nombre 86,597597....., et par suite le nombre proposé donne naissance au nombre 0,86597597..... On a donc finalement le théorème suivant :

Théorème. — *Sauf le cas où la période est égale à 9, la fraction génératrice d'une fraction périodique mixte donnée s'obtient en formant une fraction ordinaire dont le numérateur est le nombre entier composé par la partie non périodique suivie d'une période et diminué de la partie non périodique, et dont le dénominateur est formé d'autant de 9 qu'il y a de*

chiffres à la période, suivis d'autant de 0 *qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique.*

Si on applique convenablement le théorème précédent, le numérateur n'est pas terminé par un zéro, sans quoi la partie non périodique serait terminée par le même chiffre que la période et celle-ci pourrait commencer un rang plus tôt. Ainsi cela arriverait dans l'exemple précédent, en prenant 865 pour partie non périodique et 975 pour période ; mais le nombre est alors

$$0{,}865\,975\,975\ldots\ldots,$$

et la période véritable commence un rang plus tôt que l'écriture actuelle ne le suppose. D'ailleurs le nombre obtenu ainsi est $\frac{865110}{999000}$ et il est égal au précédent. Rien ne s'oppose, en effet, dans nos raisonnements, à ce que l'on modifie la période à volonté. Ainsi le nombre 0,597 597... peut s'écrire 0, 5.975.975 ....., et, en le traitant alors comme une fraction périodique mixte, on a pour fraction génératrice $\frac{5975-5}{9990}=\frac{5970}{9990}=\frac{597}{999}$. On peut encore prendre pour période 597597, et le nombre qu'on obtient ainsi $\frac{597597}{999999}$ est égal à $\frac{597}{999}$; cela est facile à voir directement, car le premier nombre est égal à $\frac{597\times 1001}{999\times 1001}$.

Il résulte aussi de la remarque que nous venons de faire que

La fraction génératrice d'une fraction décimale périodique mixte une fois réduite à sa plus simple expression, contient encore au dénominateur au moins l'un des facteurs premiers 2 *et* 5, *et l'un d'eux autant de fois qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique.*

Car le numérateur n'étant pas divisible par 10, un seul des facteurs 2 et 5 peut être commun au numérateur et au

dénominateur; l'un des deux reste donc autant de fois au dénominateur qu'il y a de zéros primitivement à la droite de ce nombre, c'est-à-dire autant de fois qu'il y a de chiffres dans la partie non périodique.

Nous pouvons maintenant terminer facilement cet exposé par la démonstration des théorèmes réciproques qui suivent.

THÉORÈME. — *Toute fraction ordinaire irréductible dont le dénominateur ne contient ni le facteur* 2, *ni le facteur* 5, *donne naissance à une fraction décimale périodique simple.*

Cette fraction décimale ne peut être limitée, sans quoi le dénominateur ne contiendrait pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5; elle ne peut être périodique mixte, sans quoi le dénominateur contiendrait le facteur 2 ou le facteur 5 et d'autres facteurs premiers. Elle est donc nécessairement périodique simple.

THÉORÈME. — *Toute fraction ordinaire irréductible dont le dénominateur contient les facteurs premiers* 2 *et* 5 *ou* 2 *ou* 5, *avec d'autres facteurs premiers, donne naissance à une fraction décimale périodique mixte, dont la partie non périodique contient autant de chiffres qu'il y a d'unités dans l'exposant le plus haut des facteurs* 2 *et* 5.

Par un raisonnement semblable au précédent, on voit que cette fraction décimale ne peut être limitée ni périodique simple. Elle est donc périodique mixte, et nous avons vu que le nombre de fois que figure au dénominateur le facteur 2 ou le facteur 5 qui entre le plus de fois est égal au nombre des chiffres de la partie non périodique.

Exemples. — $\frac{5}{8}$ et $\frac{31}{40}$ donnent des fractions décimales limitées :

$$\frac{4}{7}, \frac{8}{13}, \frac{5}{39}, \frac{2}{77}$$

donnent des fractions périodiques simples ;

$\frac{9}{14}, \frac{11}{104}, \frac{15}{386}$ donnent des frations périodiques mixtes.

* 127. **Restes des puissances d'un nombre a par rapport à un module quelconque b, premier avec lui.** — Considérons la suite des puissances de a,

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3, \ldots\ldots,\ a^n, \ldots\ldots,$$

et prenons les restes des nombres de cette suite, par rapport à un module b, premier avec a; aucun de ces restes n'est nul, puisqu'aucun de ces nombres n'a de facteur commun avec b; les divers restes obtenus sont donc tous compris dans l'ensemble $1, 2, 3, \ldots\ldots, b-1$; leur nombre est limité, et, au bout d'un certain nombre d'opérations, on retombera forcément sur un reste déjà obtenu. Soient a^k et a^{k+h} les deux puissances de a qui donnent le même reste; alors la différence $a^{k+h} - a^k = a^k(a^h - 1)$ est divisible par b; or c'est un produit de deux facteurs dont l'un d'eux, a^k, est premier avec b; donc l'autre est divisible par b; si donc on parcourt la suite des puissances de a, on rencontre certainement une puissance de a, autre que a^0, qui donne pour reste l'unité.

Désignons par a^t la première de celles qui donnent pour reste 1. Il est facile de voir que les divers nombres

$$1,\ a,\ a^2, \ldots\ldots,\ a^{t-1}$$

donnent des restes différents,

$$\alpha_1 = 1,\quad \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots\ldots,\ \alpha_t,$$

et que cet ensemble de restes est périodique. En effet, si deux de ces nombres, a^k et $a^{k'}$, donnaient le même reste, la différence $a^{k'} - a^k$ serait divisible par b; or elle peut s'écrire $a^k(a^{k'-k} - 1)$, et, comme a^k est premier avec b, $a^{k'-k} - 1$ serait divisible par b; mais k' et k sont tous deux plus petits que t, et il y aurait une puissance de a venant avant a^t et ayant pour reste l'unité.

D'autre part, toute puissance telle que a^{t+k} donne le même reste que a^k, puisque a^t donne pour reste 1. Donc les nombres $a^t, a^{t+1}, \ldots\ldots, a^{2t-1}$ donnent à nouveau les restes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_t$; de même les t puissances de a qui suivent celles-ci donnent les mêmes restes. Donc la suite des restes est périodique, elle commence au premier reste, 1, et comprend t termes.

Les seules puissances de a qui donnent pour restes 1 sont celles qui ont pour exposants les multiples de t, $0, t, 2t, \ldots, nt, \ldots$; si donc on trouve une puissance de a, a^h, qui donne pour reste l'unité, on peut être assuré que h est un multiple de t.

* 128. **Théorème de Fermat généralisé.** — *Si l'on désigne par* $\varphi(b)$ *le nombre des nombres premiers avec* b *et non supérieurs à* b, *si l'on désigne, en outre, par* a *un nombre quelconque premier avec* b, *la différence* $a^{\varphi(b)} - 1$ *est divisible par* b.

Soient, en effet, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{\varphi(b)}$, les nombres inférieurs à b et premiers avec lui ; les produits $a\alpha_1, a\alpha_2, \ldots\ldots, a\alpha_{\varphi(b)}$ donnent pour restes, par rapport au module b, tous les nombres de cet ensemble ; car deux de ces nombres, $a\alpha_h$ et $a\alpha_k$, ne peuvent donner le même reste, sans quoi leur différence, $a(\alpha_k - \alpha_h)$, serait divisible par b, ce qui n'est pas, puisque le premier facteur est premier avec b et le second plus petit que lui ; d'autre part, les restes ainsi obtenus sont tous premiers avec b, car, en désignant par r l'un d'eux, on a $a\alpha_h = bq + r$, et si r et b avaient un facteur commun, ce facteur appartiendrait à $a\alpha_h$, c'est-à-dire à a ; donc les restes de ces divers produits sont les nombres premiers avec b et plus petits que lui. Il en résulte que le produit de tous les multiples de a considérés est congru au produit des nombres α ; on a donc

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_{\varphi(b)}a^{\varphi(b)} \equiv \alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_{\varphi(b)} \pmod{b};$$

or on peut diviser les deux membres de cette congruence par le produit $\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_{\varphi(b)}$ qui est premier avec b, et l'on a $a^{\varphi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$.

Le théorème est donc établi.

Si nous désignons par t, comme nous l'avons fait précédemment, le plus petit exposant de a tel que $a^t \equiv 1 \pmod{b}$, nous pouvons affirmer, d'après ce qui a été dit antérieurement, que t est un diviseur de $\varphi(b)$.

* 129. **Nombre des termes de la période du développement d'un nombre fractionnaire en décimales.** — Multiplions maintenant tous les termes de la suite des puissances de a par A premier avec b ; nous aurons la nouvelle suite

$$A, Aa, Aa^2, \ldots\ldots, Aa^n, \ldots\ldots,$$

qui fournit, elle aussi, une suite de restes périodique, et dont la période comprend t termes.

En effet, la différence entre deux termes de cette suite, Aa^k et Aa^{k+h}, ne peut être divisible par b que si la différence entre les deux puissances de a est divisible par b, car l'autre facteur, A, qui figure dans cette différence, est premier avec b ; or ceci n'arrive que si h est un multiple de t. Donc les nombres A, Aa, Aa^2, ..., Aa^{t-1} donnent des restes différents, $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_t$; les nombres Aa^t, Aa^{t+1}, ..., Aa^{2t-1}, donnent les mêmes restes ; la suite des restes est donc périodique, et la période comprend les t restes β.

Cela posé, considérons la suite des puissances de 10,

$$1, 10, 10^2, \ldots\ldots, 10^n, \ldots\ldots,$$

qu'il faut diviser successivement par b pour avoir le dévelop-

pement de $\frac{1}{b}$ en décimales. Si b est premier avec 10, la suite des restes est périodique et contient t termes, t étant un diviseur de $\varphi(b)$. Chacune de ces divisions fournit une valeur approchée de $\frac{1}{b}$ à une unité près, à un dixième près, à un centième près, etc. ; chacun des restes obtenus, suivi d'un 0, donne le dividende partiel qui conduit à un nouveau chiffre décimal. La partie décimale est donc périodique simple et contient t termes.

Si nous multiplions tous les termes de cette suite par un nombre a, premier avec b, nous obtenons la suite

$$a,\ 10a,\ 10^2a,\ \ldots\ldots,\ 10^na,\ \ldots\ldots,$$

qui donne, quand on divise tous ces termes par b, à la façon ordinaire, les valeurs approchées par défaut du quotient de a par b à une unité près, à un dixième près, à un centième près, etc., à condition de placer la virgule à droite du chiffre des unités. Les divers restes ainsi obtenus sont les restes partiels de la division indéfinie qui donne les approximations successives de $\frac{a}{b}$; chacun d'eux suivi d'un zéro donne le dividende partiel suivant ; or cette suite de restes est périodique, la période commence au premier reste, et le nombre de ces termes est un diviseur de $\varphi(b)$. Le développement décimal est donc périodique simple et contient t chiffres à la période. De là, ce théorème, déjà démontré indirectement.

THÉORÈME. — *Si l'on convertit en décimales un nombre fractionnaire irréductible,* $\frac{a}{b}$, *dont le dénominateur ne contient ni le facteur* 2, *ni le facteur* 5, *le développement est illimité et périodique simple ; la période contient* t *chiffres,* t *étant un diviseur de* $\varphi(b)$, *et le nombre* t *est indépendant du numérateur : il est le même que pour le nombre fractionnaire* $\frac{1}{b}$.

La valeur de la période elle-même dépend du numérateur.

Supposons maintenant que b ne soit pas premier avec 10, mais contienne d'autres facteurs premiers que 2 et 5, que l'on ait $b = 2^n5^pb'$, et supposons, pour fixer les idées, que l'on ait $p \geqslant n$; considérons les nombres

$$\frac{a}{b},\ \frac{10a}{b},\ \frac{100a}{b},\ \ldots\ldots,\ \frac{10^na}{b},\ \ldots\ldots,$$

dont les parties entières représentent, abstraction faite de la virgule, les valeurs approchées par défaut de $\frac{a}{b}$, à une unité près, à un dixième près, à un centième près, etc. Jusqu'au

nombre $\frac{10^p a}{b}$, tous ces nombres, réduits à leur plus simple expression, contiennent encore au dénominateur le facteur 5 ou les facteurs 2 et 5 ; mais le nombre $\frac{10^p a}{b}$, réduit à sa plus simple expression, $\frac{a'}{b'}$, ne contient plus le facteur 2 ni le facteur 5 au dénominateur et, par suite, il donne naissance à un nombre décimal périodique simple, qui, limité à son k^e chiffre décimal, donne la valeur approchée par défaut de $\frac{a'}{b'}$ à $\frac{1}{10^k}$ près. Pour déduire de là les valeurs approchées de $\frac{a}{b}$, il faudra diviser les valeurs approchées de $\frac{a'}{b'}$ par 10^p, c'est-à-dire reculer la virgule de p rangs vers la gauche. On introduit ainsi dans la partie décimale, une partie non périodique de p termes ; quant au nombre des chiffres de la période, c'est toujours un diviseur de $\varphi(b')$. Ce nombre ne dépend que de b' et non du numérateur. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'on convertit en décimales un nombre fractionnaire irréductible dont le dénominateur contient les facteurs* 2 *et* 5 *ou seulement l'un d'eux, on obtient un nombre décimal périodique mixte, dont la partie non périodique comprend autant de chiffres qu'il y a d'unités dans l'exposant le plus élevé de* 2 *et* 5, *et la partie périodique,* t *chiffres,* t *étant un diviseur de* $\varphi(b')$, b' *désignant le dénominateur débarrassé des facteurs* 2 *et* 5.

Les nombres des chiffres de la partie non périodique et de la période ne dépendent nullement du numérateur ; mais ces chiffres eux-mêmes en dépendent.

Pour plus de détails sur ces questions, consulter les *Recherches arithmétiques* de Gauss (section sixième).

EXERCICES

1° Si l'on considère deux fractions, $\frac{3}{11}$ et $\frac{8}{11}$, de même dénominateur, et dont la somme soit égale à 1, démontrer que si on les réduit en décimales, la somme de deux chiffres de même rang dans les deux quotients est toujours égale à 9, et la somme des restes correspondants toujours égale au dénominateur, 11. — Modifier cet énoncé, pour le cas où les fractions sont exactement réductibles en décimales.

2° Si l'on réduit $\frac{1}{17}$ en décimales, on obtient une fraction décimale périodique simple dont la période contient 16 chiffres. Faire voir que les chiffres de la seconde moitié s'obtiennent en retranchant de 9 ceux de la première moitié. Généraliser.

3° Le produit de deux nombres décimaux périodiques simples est un nombre décimal périodique simple. (On prend pour valeur de chacun de ces nombres, la limite qui lui correspond).

4° Si la période d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ a $b-1$ chiffres, le dénominateur est un nombre premier, et si l'on range ces chiffres sur un cercle de façon qu'il n'y ait ni premier, ni dernier chiffre, le cercle ainsi obtenu est indépendant du numérateur, a.

5° Si plusieurs fractions irréductibles de dénominateurs b, b', b'', ..., premiers entre eux deux à deux, fournissent des périodes de n, n', n'', ... chiffres, toute fraction irréductible de dénominateur $bb'b''$..... fournit une période dont le nombre des chiffres est le plus petit commun multiple de n, n', n'', ...

6° Démontrer que quel que soit le nombre entier n, la fraction décimale qui provient de $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ est périodique mixte.

LIVRE IV

RACINES, NOMBRES INCOMMENSURABLES

CHAPITRE PREMIER

RACINE CARRÉE

130. **Définitions.** — On appelle *carré* d'un nombre le produit de ce nombre par lui-même.

Les carrés des nombres entiers forment une suite infinie et croissante,

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100, \ldots\ldots;$$

chacun d'eux se déduit du précédent d'après une loi très simple et qui résulte de l'égalité suivante :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

dans laquelle a et b désignent des nombres entiers ou fractionnaires quelconques.

Pour établir cette égalité, il suffit de se rappeler la signification de $(a+b)^2$, qui désigne le produit de deux facteurs égaux à $a+b$, et la règle qui donne le produit de deux sommes : d'après cette règle, il faut multiplier successivement les deux termes de $a+b$ par a et b; on a ainsi les produits a^2, ba, ab et b^2; on doit maintenant faire la somme de ces quatre nombres; il est visible que si l'on

réunit ensemble les deux produits *ba* et *ab* qui sont égaux, on a l'égalité annoncée.

Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

Le carré d'une somme de deux nombres (entiers ou fractionnaires) est égal à la somme des carrés des deux parties, augmentée de leur double produit.

Considérons alors deux nombres consécutifs, n et $n+1$; le carré du second est égal à n^2+2n+1. Or ce carré est le $(n+1)^e$ de la suite des carrés des nombres entiers; le nombre $2n+1$ est le $(n+1)^e$ nombre impair.

On a donc *le carré d'un nombre entier en ajoutant au carré de celui qui le précède le nombre impair de même rang que le carré que l'on veut former.*

Écrivons alors la suite des nombres impairs,

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19,.....,

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,.....

et au-dessous de ceux-ci les carrés des nombres entiers successifs; il suffit de partir de 1, écrit au-dessous du premier des nombres impairs, pour avoir tous les autres carrés, à l'aide de simples additions : on dira 1 et 3, 4, 4 et 5, 9, 9 et 7, 16, ..., et l'on écrira chaque résultat à droite du carré précédent.

Il est donc absolument évident que cette suite de carrés est croissante, et même rapidement croissante, et qu'elle ne contient pas tous les nombres entiers.

Cela posé, on appelle *racine carrée* d'un nombre entier, A, un autre nombre entier, *a*, qui, élevé au carré, reproduit le nombre A. L'opération qui permet de trouver ce nombre *a* s'appelle elle-même une *extraction de racine carrée*.

L'opération ainsi définie est rarement possible, car un nombre entier, A, choisi arbitrairement, n'est pas, en général, un carré.

Mais si A n'est pas un nombre de la suite des carrés, il est compris entre deux termes consécutifs de cette suite, a^2 et $(a+1)^2$; de sorte que, dans tous les cas, quel que soit l'entier A, on a toujours, pour une certaine valeur de l'entier a, la double inégalité qui suit :

$$a^2 \leqslant A < (a+1)^2.$$

Nous appellerons *racine carrée à une unité près* d'un nombre entier quelconque, A, la racine carrée du plus grand carré contenu dans ce nombre. Il résulte des explications précédentes, que cette racine carrée est le nombre a qui figure dans la double inégalité écrite plus haut.

La différence entre le nombre A et le plus grand carré, a^2, contenu dans ce nombre, se nomme le *reste* de l'opération qui a pour but de déterminer a.

Lorsque l'opération se fait sans reste, le nombre A est dit *carré parfait*.

D'après les inégalités précédentes, la différence $A - a^2$ est plus petite que la différence $(a+1)^2 - a^2 = 2a+1$.

Donc *le reste est plus petit que le double de la racine, augmenté de un.*

La plupart des définitions précédentes s'appliquent immédiatement aux nombres fractionnaires.

Un nombre fractionnaire est dit *carré parfait*, si on peut l'obtenir en multipliant un autre nombre fractionnaire par lui-même. Si cela arrive, le nouveau nombre fractionnaire s'appelle la *racine carrée* du premier. Mais cela n'arrive pas, en général, et nous définirons plus tard des racines carrées approchées.

131. Racine carrée à une unité près.

1er Cas. — *Le nombre donné* A *est inférieur à* 100. — Alors la racine carrée à une unité près est inférieure à 10; elle est immédiatement donnée par la table de multiplication.

qui contient, en particulier, les carrés des neuf premiers nombres entiers.

Exemples. — La racine carrée de 36 est 6; le plus grand carré contenu dans 42 est 36, la racine carrée est 6 et le reste 6; le plus grand carré contenu dans 75 est 64, la racine carrée est 8 et le reste 11.

2e CAS. — *Le nombre donné* A *est supérieur à* 100. — Alors 10 est parmi les nombres dont les carrés sont plus petits que A; la racine carrée de A est donc au moins égale à 10, et se compose de dizaines et d'unités. Soient a le nombre des dizaines et b celui des unités; la racine carrée peut s'écrire $a+b$, à condition de penser que a désigne des dizaines. Or le carré de $a+b$ se compose d'abord du carré de a, qui est un nombre exact de centaines, du double produit de a par b, qui est un nombre exact de dizaines, et du carré de b, qui est un nombre inférieur à 100.

Ainsi 37 peut s'écrire $3+7$, pourvu que nous pensions que 3 représente des dizaines, et son carré est 9 centaines, plus 42 dizaines, plus 49 unités. Comme le carré de $a+b$ est contenu dans A, et qu'il y a encore un reste non nul, en général, on voit que le carré du nombre des dizaines de la racine est contenu dans les centaines du nombre A. Mais nous allons montrer, ce qui n'est pas évident, d'après ce qui précède, que *le nombre des dizaines de la racine carrée à une unité près d'un nombre* A *est la racine carrée à une unité près du nombre des centaines de* A.

Désignons, en effet, par A_1 le nombre des centaines de A et par A_2 la partie restante; désignons, en outre, par x la racine carrée à une unité près de A_1; nous aurons

$$x^2 \leqslant A_1 < (x+1)^2,$$

et, en multipliant ces trois nombres par 100,

$$(10x)^2 \leqslant 100A_1 < [10(x+1)]^2.$$

On a donc sûrement $(10x)^2 \leqslant 100A_1 + A_2$, c'est-à-dire

$(10x)^2 \leqslant A$; d'autre part, $[10(x+1)]^2$ est supérieur à $100A_1$; donc ce nombre des centaines surpasse au moins le nombre des centaines de A de une centaine, et, par suite, le second nombre est supérieur à A; on a donc finalement

$$(10x)^2 \leqslant A < [(10(x+1)]^2.$$

La racine carrée à une unité près du nombre A est donc au moins égale à x dizaines et plus petite que $x+1$ dizaines; elle contient donc x dizaines.

Une fois que l'on aura le nombre des dizaines, on obtiendra le chiffre des unités en retranchant de A le carré du nombre formé par les dizaines de la racine; cela se fait en retranchant le carré de x du nombre des centaines de A, et abaissant à droite de cette différence les deux derniers chiffres de A. Le premier reste ainsi obtenu, B, contient encore deux fois le produit des dizaines par le chiffre des unités, le carré des unités et le reste de l'opération; si donc on divise le nombre des dizaines de B par le double des dizaines de la racine, on aura le chiffre des unités ou un chiffre trop fort. Pour essayer ce chiffre, on le met à droite des dizaines de la racine, on élève le nombre ainsi formé au carré et on retranche le résultat de A; si cette soustraction est possible, le chiffre essayé est bon; sinon, on le diminue de une unité et on recommence l'essai; on agit ainsi jusqu'à ce que l'essai réussisse. — On peut simplifier les essais, en remarquant que l'on a déjà retranché de A le carré du nombre des dizaines, et qu'il suffit alors de soustraire du reste obtenu, B, le double produit des dizaines par les unités, puis le carré des unités, c'est-à-dire, avec les notations antérieures, de retrancher de B le nombre $2ab+b^2$ ou $b(2a+b)$. A droite du double des dizaines, on placera donc le chiffre à essayer, on multipliera le nombre ainsi formé par ce chiffre et on retranchera le produit de B, si cela se peut; sinon, on diminuera ce chiffre de une unité et on recommencera l'essai de la même façon.

Exemple: Extraire la racine carrée à une unité près de 8657. — On dispose l'opération d'une manière analogue à celle employée pour la division: on met le nombre donné à la place du dividende, la racine à la place du diviseur, les calculs auxiliaires à la place du quotient et au-dessous; enfin les soustractions indiquées dans les diverses parties de l'opération, au-dessous du nombre donné. Séparons les 86 centaines du nombre par un point; la racine carrée à une unité près de 86 est 9 et constitue le nombre des dizaines de la racine; retranchons des 86 centaines du nombre le carré de 9 dizaines ou 81 centaines; il reste 5 centaines, à droite desquelles nous abaissons les 57 unités non employées du nombre proposé. Divisons les 55 dizaines de ce reste par le double des dizaines trouvées à la racine, par 18; nous avons pour quotient 3, qui est le chiffre des unités ou un chiffre trop fort. Pour essayer ce chiffre, nous le plaçons à droite des 18 dizaines qui représentent le double des dizaines de la racine, nous avons ainsi le nombre 183, dont le produit par 3 doit être soustrait de 557. La soustraction est possible; le chiffre essayé est bon, la racine est 93 et le reste, 8.

86.57	93
81	183
557	3
549	549
8	

Examinons maintenant le cas où le nombre des dizaines de la racine est lui-même supérieur à 10 et prenons comme exemple le nombre 74986356124. Le nombre des centaines de ce nombre est 749863561; ce nombre est plus grand que 100; donc sa racine contient aussi des dizaines, que nous aurons en extrayant la racine carrée à une unité près du nombre des centaines de ce nouveau nombre, c'est-à-dire de 7498635; la racine de celui-ci contient elle-même des dizaines et des unités; nous sommes donc conduit à extraire la racine carrée des centaines de ce nouveau nombre, et ainsi de suite.

7.49.86.35.61.24	273836
4	48 | 47 | 5468
349	8 | 7 | 8
329	384 | 329 | 43744
2086	543 | 54763
1629	3 | 3
45735	1629 | 164289
43744	547666
199161	6
164289	3285996
3487224	
3285996	
201228	

En définitive, nous sommes ramenés à extraire successivement les racines carrées des nombres 7, 749, 74986, ..., pour avoir le premier, les deux premiers, les trois premiers, ... chiffres de la racine, ce qui se fait en abaissant à la suite de chacun des restes partiels la tranche de deux chiffres qui vient après la dernière employée. De cette façon, la portion de racine trouvée à un moment quelconque, représente les dizaines de la racine du nombre qu'on obtient en prenant une tranche de plus, et chaque chiffre de la racine, autre que le premier, représente au moment où on le cherche, le chiffre des unités de la racine du nombre actuellement employé. Ainsi la dernière tranche à gauche du nombre donné est 7, sa racine carrée est 2 et le reste 3 ; si l'on considère maintenant le nombre 749, le reste est 349 et le second chiffre de la racine est le chiffre des unités de la racine de 749 ; on l'obtiendra en divisant les 34 dizaines du reste par le double des dizaines de la racine, c'est-à-dire par 4 ; le quotient est 8 ; pour essayer ce chiffre, nous le plaçons à droite des quatre dizaines obtenues en doublant la racine, nous multiplions le nombre ainsi formé, 48, par

8 et nous obtenons 384, qui ne peut pas se soustraire de 349, donc le chiffre 8 est trop fort.

Nous essayons alors le chiffre 7 de la même façon, et l'essai réussit ; le second chiffre de la racine est donc 7 et le reste, 20. Pour le nombre suivant, 74986, le reste est 2086 et s'obtient en abaissant la troisième tranche ; pour ce nombre, la portion trouvée à la racine, 27, représente les dizaines. On aura le chiffre des unités, c'est-à-dire le troisième chiffre de la racine, en divisant les 208 dizaines du reste par le double de 27 ou 54 ; le quotient est 3, et ce chiffre essayé comme précédemment, est trouvé bon. Il n'y a plus qu'à continuer ainsi jusqu'à ce que toutes les tranches aient été abaissées successivement.

On peut introduire diverses simplifications dans l'écriture ; on peut se dispenser, par exemple, d'écrire deux fois le produit obtenu dans chaque essai ; on peut même ne pas l'écrire du tout et faire la multiplication ainsi que la soustraction de chaque essai en même temps. Pour former le double de la racine, à un moment quelconque, on peut remarquer que le double de la portion précédente a déjà été formé et qu'on lui a ajouté le nouveau chiffre ; il suffit donc de l'ajouter encore une fois pour avoir le double de la portion actuelle.

Si, dans l'une des divisions indiquées, le quotient surpasse 9, on peut l'abaisser immédiatement à 9, puisque ce quotient doit fournir un chiffre de la racine.

Si dans l'une des divisions indiquées, le quotient est 0, on écrit ce chiffre à la racine, à droite du reste employé on abaisse la tranche suivante, et on continue l'opération.

Règle. — *Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier quelconque, à une unité près, on divise le nombre en tranches de deux chiffres, à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant ne contenir qu'un seul chiffre.*

On extrait alors la racine carrée à une unité près du nom-

bre formé par cette dernière tranche, on a ainsi le premier chiffre de la racine ; on retranche le carré de ce chiffre de la tranche employée, et, à droite de la différence obtenue, on abaisse la tranche suivante ; on a ainsi le premier reste.

On divise le nombre des dizaines de ce premier reste par le double du chiffre trouvé à la racine, et on a le second chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. Pour essayer ce chiffre, on le met à droite du double du premier chiffre de la racine, et on multiplie le nombre ainsi formé par le chiffre à essayer ; si le produit obtenu peut se retrancher du premier reste, le chiffre essayé est bon ; sinon on le diminue d'une unité, et on recommence l'essai. Lorsque l'essai a réussi, on abaisse à droite de la différence obtenue la troisième tranche du nombre ; on a ainsi le second reste.

On divise le nombre formé par les dizaines de ce reste par le double de la portion déjà trouvée à la racine, et on a le troisième chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. On essaie ce chiffre comme précédemment, en le plaçant à droite du double de la portion déjà trouvée de la racine, et en multipliant le nombre ainsi formé par le chiffre à essayer ; si le produit obtenu peut se retrancher du second reste, le chiffre est bon; sinon on le diminue d'une unité et on recommence l'essai. Lorsque l'essai a réussi, on abaisse à droite de la différence obtenue la quatrième tranche du nombre, et on a ainsi le troisième reste.

L'opération se poursuit ainsi, toujours de la même façon, jusqu'à ce que toutes les tranches du nombre donné aient été abaissées successivement.

Si dans l'une des divisions indiquées, on trouve pour quotient 0, *c'est le chiffre correspondant de la racine. Si on trouve pour quotient* 10 *ou un nombre plus fort, on rabaisse immédiatement ce quotient à* 9.

Si, dans le but d'abréger les essais, on diminue le chiffre à essayer de plus d'une unité, on peut tomber sur un chiffre trop petit ; on sera averti de l'erreur commise par ce fait que le reste partiel obtenu à ce moment sera plus grand que

le double de la portion trouvée à la racine et supposée exacte. En effet, à un moment quelconque, la portion trouvée à la racine doit être la racine carrée à une unité près du nombre formé par un certain nombre de tranches prises sur la gauche du nombre donné. Désignons par B ce nombre, par a la portion trouvée à la racine et supposée trop petite ; alors la racine est au moins $a+1$ et l'on a

$$B \geqslant (a+1)^2 > a^2.$$

Donc $B - a^2$ est au moins égal à $(a+1)^2 - a^2$, c'est-à-dire à $2a+1$; mais $B - a^2$ est le reste partiel que l'on vient d'obtenir ; donc, etc.

Enfin, il est facile d'avoir une limite supérieure du nombre des essais à faire dans chaque cas. A tout moment le chiffre que l'on cherche est le chiffre des unités de la racine carrée à une unité près d'un nombre B formé par un certain nombre de tranches prises sur la gauche du nombre proposé A ; si donc on désigne par a la portion déjà trouvée à la racine et par b le chiffre des unités de cette racine, on a

$$B = (10a+b)^2 + r = 100a^2 + 20ab + b^2 + r ;$$

le reste que l'on vient d'obtenir est donc

$$B - 100a^2 = 20ab + b^2 + r ;$$

or on obtient le chiffre à essayer en divisant le reste partiel obtenu par le double du nombre formé par les dizaines de la racine, c'est-à-dire par $20a$, et en abaissant à 9 ce quotient, s'il surpasse 9; ce nombre est la partie entière du quotient $\frac{20ab + b^2 + r}{20a} = b + \frac{b^2 + r}{20a}$; il surpasse b de la partie entière de $\frac{b^2 + r}{20a}$. Le maximum de r est $2(10a+b)$; on a donc

$$\frac{b^2 + r}{20a} \leqslant \frac{b^2 + 2b + 20a}{20a} < \frac{(b+1)^2 + 20a}{20a}.$$

Ce dernier nombre est égal à $1 + \frac{(b+1)^2}{20a}$ et sa plus haute valeur s'obtient en faisant $b = 9$ et $a = 1$; on trouve ainsi 6. Donc le nombre trouvé surpasse le véritable chiffre d'au plus 5 unités.

Mais dans le cas que nous venons de signaler il n'y a justement aucun essai infructueux à faire, puisque le vrai chiffre est 9, le quotient trouvé, 14, et que ce quotient doit être rabaissé à 9. Laissons alors à a sa plus petite valeur, 1, et donnons à b successivement les valeurs 8, 7, 6, 5, ...; nous voyons que le quotient trouvé surpasse b d'au plus 5, 4, 3, 2, ... unités, ce qui donne 1, 2, 3, 2, ... essais à faire. Le nombre maximum des essais infructueux est donc 3 et on l'obtient parfois pour $b = 6$ et $a = 1$.

Exemple : Extraire la racine carrée à une unité près de 288. La racine est 16; le chiffre 6 n'est obtenu qu'après trois essais.

132. **Preuve de la racine carrée.** — De tout ce qui précède, il résulte que la racine carrée a pour but de décomposer un nombre entier en deux parties : l'une, le carré d'un nombre entier, a; l'autre, un nombre entier, r, au plus égal au double de la racine. Si donc on désigne par A un nombre entier donné, l'opération actuelle est définie par l'égalité

$$A = a^2 + r \qquad (r < 2a + 1).$$

Pour vérifier une opération particulière, on élèvera la racine au carré, on ajoutera au résultat le reste de l'opération et on devra retrouver le nombre donné, A. Si cela est, il y a de fortes présomptions pour que l'opération soit exacte. Si cela n'est pas, on ne peut rien affirmer, car les erreurs commises peuvent aussi bien se trouver dans les opérations de vérification que dans l'opération elle-même.

On peut procéder autrement, en prenant les restes des divers nombres, par rapport à un module quelconque, mais

simple, 9 ou 11, par exemple. Par rapport au module 9, on a successivement

$$A = \text{mult. } 9 + A', \qquad (A' < 9)$$

$$a = \text{mult. } 9 + a'; \qquad (a' < 9)$$

d'où $\quad a^2 = \text{mult. } 9 + a'^2,$

et $\quad r = \text{mult. } 9 + r'; \qquad (r' < 9)$

l'égalité précédente devient donc

$$\text{mult. } 9 + A' = \text{mult. } 9 + a'^2 + r',$$

et celle-ci nous montre que A' est le reste de $a'^2 + r'$ par rapport au module 9.

On prendra donc les restes du nombre donné, de la racine et du reste de l'opération par rapport au module 9 ; on vérifiera que le carré du second augmenté du troisième donne pour reste le premier, relativement au module 9.

Les deux méthodes de vérification indiquées, appliquées à l'exemple traité antérieurement, réussissent toutes deux et nous permettent de croire à l'exactitude de l'opération. Ainsi le carré de 273836 est 74986154896, et ce nombre, ajouté au reste, 201228, donne le nombre proposé 74986356124. D'autre part, le reste du nombre proposé par rapport au module 9 est 1, celui de la racine est 2 et celui du reste, 6 ; on a ensuite $2 \times 2 + 6 = 10$, dont le reste est 1, ce qu'on devait trouver.

133. Racine carrée à une unité près d'un nombre fractionnaire ou décimal quelconque. — On appelle *racine carrée à une unité près* d'un nombre fractionnaire ou décimal quelconque, A, la racine carrée du plus grand carré entier contenu dans le nombre proposé (n° 130).

Il est facile de voir que *la racine carrée de* A *à une unité près est la même que celle de sa partie entière*, B ; en effet, on a $A = B + f$, f désignant une fraction ou un nombre fractionnaire inférieur à 1 ; d'autre part, si a désigne la

racine carrée à une unité près de B, on a

$$a^2 \leqslant B < (a+1)^2;$$

donc a^2 est plus petit que $B+f$; enfin $(a+1)^2$ étant au moins égal à $B+1$, est supérieur à $B+f$. On a donc finalement la double inégalité

$$a^2 < A < (a+1)^2,$$

qui montre que a est la racine carrée à une unité près de A.

Le reste de l'opération est $A - a^2$.

Exemples : La racine carrée à une unité près du nombre 8657,465 est la même que celle de 8657 ; elle est égale à 93, et le reste est 8,465. De même la racine carrée du nombre 865784,3278 est la même que celle du nombre 865784, et le reste est 884,3278.

134. **Propriétés relatives à la racine carrée.** — *Le nombre des chiffres contenus dans la racine carrée à une unité près d'un nombre entier quelconque est égal au nombre des tranches de deux chiffres qu'il contient, le nombre étant parcouru de droite à gauche et la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir qu'un seul chiffre.*

Cette propriété résulte évidemment de la façon dont se fait l'opération ; mais elle peut aussi se démontrer directement. Soit en effet n le nombre des tranches que contient l'entier A ; le nombre A est au moins égal au plus petit des nombres de n tranches, 100^{n-1}, et il est inférieur au plus petit nombre de $n+1$ tranches, 100^n ; on a donc

$$100^{n-1} \leqslant A < 100^n,$$

ou

$$10^{2(n-1)} \leqslant A < 10^{2n}.$$

Or la racine carrée de 10^{2k} est 10^k, d'après les règles de calcul des exposants ; donc la racine carrée de A est au moins égale à 10^{n-1} et elle est moindre que 10^n. Elle a donc n chiffres.

Le carré d'un nombre fractionnaire irréductible est un autre nombre fractionnaire irréductible dont les deux termes sont des carrés parfaits.

Car si $\frac{a}{b}$ désigne un nombre fractionnaire irréductible, son carré est $\frac{a^2}{b^2}$, d'après la règle de multiplication des nombres fractionnaires (n° 109). Or ce nouveau nombre est irréductible, puisque les facteurs premiers différents de a^2 et b^2 sont les mêmes que ceux de a et b, et que ceux-ci n'ont aucun facteur commun.

Il résulte de là que :

Si un nombre entier n'est pas un carré parfait, il n'est le carré d'aucun nombre fractionnaire. Si les deux termes d'un nombre fractionnaire irréductible ne sont pas des carrés parfaits, le nombre lui-même n'est le carré d'aucun nombre entier ni fractionnaire.

Il n'y a qu'à supposer réalisées les hypothèses rejetées dans ces deux énoncés, pour s'apercevoir de leur inexactitude.

Si l'on donne un nombre fractionnaire quelconque, $\frac{a}{b}$, *irréductible ou non*, on verra de suite si c'est un carré en le réduisant au dénominateur b^2; on aura ainsi $\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2}$, et ab devra être un carré parfait. En effet, le nombre $\frac{a}{b}$, réduit à sa plus simple expression, devra avoir pour termes deux carrés parfaits; on aura donc $a = k\alpha^2$, $b = k\beta^2$, α^2 et β^2 étant les termes du nombre réduit à sa plus simple expression et k un certain entier, et dès lors : $ab = k^2\alpha^2\beta^2$, ce

qui prouve le fait énoncé. D'ailleurs, il est évident que si ab est un carré parfait, le nombre $\frac{a}{b}$ est aussi un carré parfait, puisque ce fait est manifeste sur le nombre égal $\frac{ab}{b^2}$.

Par conséquent, suivant que ab est ou n'est pas un carré parfait, le nombre $\frac{a}{b}$ est ou n'est pas lui-même un carré, que ce nombre soit ou ne soit pas réduit à sa plus simple expression.

135. Valeurs approchées d'une racine carrée. — On appelle *racine carrée à* $\frac{1}{10^n}$ *près* d'un nombre entier ou fractionnaire quelconque le plus grand nombre décimal formé d'unités du n^e ordre décimal et dont le carré soit inférieur au nombre donné ou égal à ce nombre.

Si nous désignons par $\frac{x}{10^n}$ ce nombre et par A le nombre donné, nous aurons, d'après la définition précédente,

$$\left(\frac{x}{10^n}\right)^2 \leqslant A < \left(\frac{x+1}{10^n}\right)^2,$$

ou

$$\frac{x^2}{10^{2n}} \leqslant A < \frac{(x+1)^2}{10^{2n}}.$$

Multiplions les trois nombres qui figurent dans ces inégalités par 10^{2n} ; nous aurons les deux inégalités suivantes :

$$x^2 \leqslant A \times 10^{2n} < (x+1)^2,$$

qui expriment que x est la racine carrée, à une unité près, du nombre $A \times 10^{2n}$.

Donc, *pour avoir la racine carrée de* A *à* $\frac{1}{10^n}$ *près, on multiplie le nombre donné par* 10^{2n}, *on prend sa partie entière, et l'on extrait la racine carrée de ce nombre entier à une unité près, puis on divise cette racine par* 10^n.

Les deux nombres $\frac{x}{10^n}$ et $\frac{x+1}{10^n}$ que l'on obtient par ce procédé s'appellent les *valeurs approchées par défaut et par excès à* $\frac{1}{10^n}$ *près* de la racine carrée du nombre donné, A.

Si A est un nombre décimal, il suffit, pour obtenir la valeur approchée par défaut, d'avancer la virgule de $2n$ rangs vers la droite, et d'extraire la racine carrée du nombre entier ainsi formé, à la façon ordinaire, en plaçant toutefois une virgule à droite du chiffre qui termine la racine carrée du nombre donné à une unité près : la multiplication du nombre donné par 10^{2n} et la division de la racine par 10^n se trouvent faites en même temps. Si A n'est pas un nombre décimal, on peut toujours le considérer comme tel : s'il est entier, on met autant de zéros que l'on veut à droite de la virgule ; s'il est fractionnaire, on le développe en décimales, et on obtient ainsi autant de chiffres décimaux que l'on veut, ce qui permet d'avancer la virgule de $2n$ rangs vers la droite, et, par suite, d'avoir la partie entière du produit de A par 10^{2n}.

Dans la pratique, lorsqu'on veut avoir les valeurs approchées par défaut de la racine carrée d'un nombre donné, on développe le nombre A en décimales, si cela est nécessaire ; on poursuit ce développement aussi loin que l'on veut, soit à l'aide de zéros, s'il est limité, soit à l'aide de la période, s'il est illimité, et l'on extrait la racine carrée du nombre ainsi formé, à la façon ordinaire, comme si on voulait obtenir la racine carrée à une unité près, c'est-à-dire en ne considérant d'abord que les tranches de la partie entière ; puis cela fait, on met une virgule à droite du chiffre des unités de la racine, et l'on continue l'opération

toujours de la même façon, en abaissant à chaque fois deux chiffres décimaux à droite du reste obtenu, de telle sorte que la partie décimale soit ainsi régulièrement parcourue de gauche à droite. Si l'on s'arrête au n^e chiffre décimal, on a la valeur approchée de la racine à $\frac{1}{10^n}$ près et par défaut.

Nous sommes donc encore ici en présence d'une opération, en général illimitée, et qui donne lieu, comme le développement de $\frac{A}{B}$ en décimales, aux remarques suivantes :

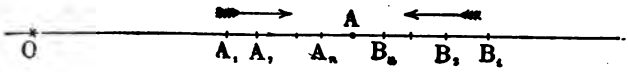
1° Les valeurs approchées par défaut d'une racine carrée, à une unité près, à un dixième près, à un centième près, etc., forment une suite croissante, dont chaque terme se déduit du précédent par l'addition, sur sa droite, d'un nouveau chiffre décimal, qui peut être nul. Deux valeurs approchées par défaut et consécutives peuvent être égales. Elles seront toutes égales, à partir d'un certain rang, si le développement est limité.

2° Les valeurs approchées par excès forment une suite décroissante, dont chaque terme se déduit du précédent, en lui enlevant une unité du dernier ordre décimal écrit et en lui ajoutant une unité, au moins, 10 unités, au plus, de l'ordre décimal suivant. Deux valeurs approchées par excès et consécutives peuvent être égales. Il n'arrive pas, dans l'opération actuelle, que toutes les valeurs approchées par excès soient égales.

3° Si l'on connaît une valeur approchée par défaut quelconque, on aura celles qui la précèdent, en supprimant des chiffres décimaux sur sa droite.

4° Si l'on porte sur une droite, à partir d'un même point, O, et dans le même sens, vers la droite, par exemple, des longueurs OA_1, OA_2, ..., OA_n, ..., mesurées par les valeurs approchées par défaut, et des longueurs OB_1, OB_2, ..., OB_n, ..., mesurées par les valeurs approchées par

excès, le point mobile qui décrit l'ensemble des points A_n, marche de gauche à droite, quand n augmente, et celui qui décrit l'ensemble des points B_n, marche de droite à gauche ;



le premier point est toujours à gauche du second et la distance qui les sépare tombe au-dessous de toute longueur donnée à l'avance, quand n est assez grand, car cette distance, A_nB_n, a pour mesure $\frac{1}{10^n}$. On voit donc qu'entre les deux ensembles de points, il ne peut y avoir qu'un seul point de la droite, A ; on admet que ce point existe ; on le nomme *point-limite* commun aux ensembles A_n et B_n ; et la longueur qu'il définit nous servira plus tard à définir la racine carrée exacte du nombre donné.

Si les valeurs approchées par défaut sont toutes égales, à partir d'un certain rang, $n = k$, c'est le dernier des points A_n, le point A_k, qui est le point-limite de l'ensemble des B_n.

Le développement actuel en décimales est très différent de celui que l'on a rencontré dans la réduction d'un quotient en décimales. Ici on ne connaît pas la loi de formation du développement et ce développement ne peut être poursuivi indéfiniment ; en d'autres termes, il est impossible de donner la valeur du p^e chiffre décimal, tant qu'on n'a pas fait l'opération jusque-là.

Tout développement décimal, quelle que soit sa source, conduit à des remarques analogues, sauf en ce qui concerne les valeurs approchées par excès, qui peuvent être toutes égales à partir d'un certain rang.

Comme exemple, nous donnons ici le calcul de la racine carrée du nombre décimal 3,14159265358979323846....., à une unité près du 10e ordre décimal.

3,14159265358979323846	1,7724538509
214	27
2515	7
8692	347
160865	7
1908935	3542
13651089	2
301638079	35444
1804553532	4
320997073846	354485
1955380765	5
	3544903
	3
	35449068
	8
	354490765
	5
	35449077009
	9

Dans cet exemple, les calculs auxiliaires sont réduits au minimum.

Les valeurs approchées par défaut sont 1, 1,7, 1,77, 1,772, 1,7724, 1,77245, 1,772453, 1,7724538, 1,77245385, 1,772453850, 1,7724538509, ... ; la 9e et la 10e sont égales.

Les valeurs approchées par excès sont 2, 1,8, 1,78, 1,773, 1,7725, 1,77246, 1,772454, 1,7724539, 1,77245386, 1,772453851, 1,7724538510, ... ; la 10e et la 11e sont égales.

On peut se proposer aussi de calculer les valeurs approchées de la racine carrée d'un nombre A, à $\frac{p}{q}$ près, $\frac{p}{q}$ étant un nombre fractionnaire quelconque. Pour cela, il faut trouver un nombre entier x, tel que le carré de $\frac{px}{q}$

soit inférieur à A ou égal à ce nombre, et tel que le carré de $\frac{p(x+1)}{q}$ soit supérieur à A. Le nombre entier x doit donc être déterminé par la double inégalité

$$\left(\frac{px}{q}\right)^2 \leqslant A < \left[\frac{p(x+1)}{q}\right]^2,$$

ou

$$\frac{p^2}{q^2}x^2 \leqslant A < \frac{p^2}{q^2}(x+1)^2.$$

En multipliant ces trois nombres par $\frac{q^2}{p^2}$, on obtient la double inégalité

$$x^2 \leqslant \frac{Aq^2}{p^2} < (x+1)^2,$$

qui montre que x est la racine carrée à une unité près du nombre $\frac{Aq^2}{p^2}$. Donc

Pour avoir la racine carrée d'un nombre, A, à $\frac{p}{q}$ près, on multiplie ce nombre par le carré du nombre fractionnaire renversé, on prend la partie entière du produit, on extrait la racine carrée de cette partie entière à une unité près, et on multiplie le nombre ainsi obtenu par $\frac{p}{q}$.

* 136. **Résidus et non-résidus quadratiques** (*). — Par rapport à un module donné, m, tous les nombres entiers peuvent se distribuer en classes : chacun d'eux est de la forme $a+km$, k étant un certain nombre entier, positif, négatif ou nul, et a, l'un des nombres entiers plus petits que m, $0, 1, 2, \ldots, m-1$. Le carré de ce nombre est $a^2+2akm+k^2m^2$; il ne diffère de a^2 que par un multiple de m, et, par suite, le reste qu'il donne par rapport au module m, est le même que le reste de a^2.

On peut donc remplacer tout nombre entier, au point de vue

(*) M. A. Matrot, ingénieur en chef des mines, a préparé une brochure fort intéressante sur la théorie élémentaire des résidus quadratiques et dont je me suis inspiré dans les notions que je donne ici. Voir aussi les *Recherches arithmétiques* de Gauss (section quatrième).

du reste que fournit son carré relativement au module m, par le nombre qui lui est congru suivant le module et qui est plus petit que le module.

Nous aurons donc les divers restes des carrés, par rapport à un module quelconque m, en considérant les nombres inférieurs à m, $0, 1, 2, \ldots\ldots, m-1$, les élevant au carré et prenant les restes des résultats obtenus. Le premier de ces nombres, 0, correspond aux multiples de m et donne pour reste 0 ; nous ne le considérerons pas. Le second donne pour reste 1.

Il est facile de voir que les nombres

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2, \ldots\ldots (m-1)^2$$

ne donnent pas des restes tous différents les uns des autres. Considérons en effet un nombre a, au plus égal à $\frac{m}{2}$, si m est pair, à $\frac{m-1}{2}$, si m est impair, et prenons son complément au module, $m-a$; les deux nombres a et $m-a$ ont pour carrés a^2 et $m^2-2ma+a^2$, et ceux-ci ont le même reste, par rapport au module m. Il résulte de là que les seuls nombres de la suite $1, 2, 3, \ldots\ldots, m-1$, dont les carrés peuvent fournir des restes différents, sont les nombres

$$1, 2, 3, \ldots\ldots, \frac{m}{2}, \text{ si } m \text{ est pair,}$$

$$1, 2, 3, \ldots\ldots, \frac{m-1}{2}, \text{ si } m \text{ est impair.}$$

Mais ces nombres eux-mêmes, lorsque m n'est pas premier, ne donnent pas toujours des restes de carrés distincts.

Cela posé, tout nombre inférieur à m, et obtenu comme reste de carré, par rapport à ce module, se nomme un *résidu quadratique de* m ou simplement un *résidu de* m. Les autres nombres, inférieurs à m, se nomment des *non-résidus quadratiques* ou simplement des *non-résidus de* m.

Le nombre des résidus de m est au plus $\frac{m}{2}$, si m est pair, au plus $\frac{m-1}{2}$, si m est impair. Le nombre des non-résidus est au moins $\frac{m}{2}-1$, dans le premier cas, au moins $\frac{m-1}{2}$, dans le second.

Cette relation d'un nombre entier, a, à un autre nombre entier, m, s'exprime par l'une ou l'autre des notations $a = \mathrm{R}(m)$, $a = \mathrm{R}m$, ou simplement $a\mathrm{R}m$, si a est résidu de m, et par $a = \mathrm{N}(m)$, $a = \mathrm{N}m$, $a\mathrm{N}m$, si a est non-résidu.

Si le nombre a est résidu, la congruence $x^2 \equiv a (\mathrm{mod.}\, m)$ a des solutions entières ; sinon, elle n'en a pas. Lorsque cette con-

gruence a une solution, elle en a au moins deux, à moins que m ne soit pair, et que la solution ne soit $\frac{m}{2}$; car en désignant par α une racine de cette congruence, on voit que $m-\alpha$ est aussi racine, puisque les deux carrés, α^2 et $(m-\alpha)^2$, donnent le même reste ; d'ailleurs, ces deux nombres ne sont égaux que si $\alpha = \frac{m}{2}$.

Pour former les résidus d'un nombre m, on forme donc les carrés des nombres 1, 2, 3,....., $\frac{m}{2}$, si m est pair, les carrés des nombres 1, 2, 3,....., $\frac{m-1}{2}$, si m est impair, et on prend leurs restes par rapport à m. Ceci se fait en partant de 1, et en ajoutant successivement les nombres impairs 3, 5, 7, ... (n° 130), et en retranchant à chaque fois du résultat le nombre m, si cela se peut. Si m est pair, le dernier nombre employé est $\frac{m}{2}$ et peut s'écrire $\left(\frac{m}{2}-1\right)+1$; son carré est $\left(\frac{m}{2}-1\right)^2+2\left(\frac{m}{2}-1\right)+1$ ou $\left(\frac{m}{2}-1\right)^2+m-1$; les opérations seront donc terminées quand on aura ajouté le nombre impair immédiatement inférieur au module. Si m est impair et égal à $2n+1$, le dernier nombre employé est n, et peut s'écrire $(n-1)+1$; son carré est $(n-1)^2+2(n-1)+1$ ou $(n-1)^2+2n-1$; les opérations seront donc terminées quand on aura ajouté le nombre impair immédiatement inférieur au module.

Exemple. — Trouver les résidus de 10. Les résidus de 10 sont donnés ainsi : 1, 1 et 3, 4, 4 et 5, 9, 9 et 7, 16 ou 6, 6 et 9, 15 ou 5. Ce sont donc les nombres 1, 4, 5, 6, 9. Il y a ici $\frac{m}{2}=5$ résidus et $\frac{m}{2}-1=4$ non-résidus, 2, 3, 7, 8.

Trouver les résidus de 21. On a d'abord 1, puis 1 et 3, 4, 4 et 5, 9, 9 et 7, 16, 16 et 9, 25 ou 4, 4 et 11, 15, 15 et 13, 28 ou 7, 7 et 15, 22 ou 1, 1 et 17, 18, 18 et 19, 37 ou 16. Il y a 7 résidus, 1, 4, 7, 9, 15, 16, 18, et 13 non-résidus, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 19, 20.

Nous donnons ici une table des résidus de tous les nombres entiers, depuis 2 jusqu'à 20.

Modules	Résidus
2	1
3	1
4	1
5	1, 4
6	1, 3, 4
7	1, 2, 4
8	1, 4
9	1, 4, 7
10	1, 4, 5, 6, 9
11	1, 3, 4, 5, 9
12	1, 4, 9
13	1, 3, 4, 9, 10, 12
14	1, 2, 4, 7, 8, 9, 11
15	1, 4, 6, 9, 10
16	1, 4, 9
17	1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16
18	1, 4, 7, 9, 10, 13, 16
19	1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17
20	1, 4, 5, 9, 16.

Pour aucun de ces nombres nous n'avons écrit le résidu 0. Il suffit de jeter les yeux sur cette table pour apercevoir que certains des modules ont leur nombre maximum de résidus et que cela n'arrive pas pour tous.

Nous allons terminer ce paragraphe par quelques propriétés générales et très simples concernant les résidus.

1° *Si* m *désigne un nombre impair de la forme* $4n+1$, *les résidus s'obtiennent en formant les carrés des nombres* $1, 2, 3, \ldots\ldots, 2n$ *et prenant les restes de ces carrés par rapport au module* m. *Le dernier des résidus est* $3n+1$, *et on déduit de celui-ci tous les autres en ajoutant successivement les nombres pairs* $2, 4, 6, \ldots\ldots,$ *et en retranchant à chaque fois du résultat le module, si cela se peut.*

En effet, les deux nombres $2n$ et $2n+1$ sont complémentaires au module ; donc leurs carrés donnent le même reste. Or, on a

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = n(4n+1) + 3n + 1 ;$$

donc le reste de ce carré, par rapport au module, $4n+1$, est $3n+1$. D'autre part, le nombre de la première moitié, qui en a μ après lui, peut se remplacer par son complément au module, qui fait partie de la seconde moitié et qui en a μ avant lui, c'est-à-

dire par $2n+1+\mu$. Le carré de celui-ci est

$$(2n+\mu)^2+2(2n+\mu)+1 \quad \text{ou} \quad (2n+\mu)^2+4n+1+2\mu\,;$$

il est donc congru au carré du nombre précédent, augmenté de 2μ. On voit donc que si on parcourt les résidus en sens inverse de l'ordre primitivement adopté, en partant de $3n+1$, on aura le résidu suivant en ajoutant 2 à celui-ci, puis le suivant en ajoutant 4 au nouveau, etc., et en retranchant le module du résultat obtenu, quand cela se peut.

Il y a donc deux moyens d'obtenir les résidus de $m=4n+1$: 1° partir de 1 et ajouter successivement les nombres impairs 3, 5, 7, ... ; 2° partir de $3n+1$ et ajouter successivement les nombres pairs 2, 4, 6, ... ; chaque résultat, bien entendu, étant ramené au-dessous du module, par la soustraction de ce module, s'il y a lieu.

2° *Si* m *est un nombre impair de la forme* $4n+3$, *les résidus s'obtiennent en formant les carrés des nombres* 1,2,3, ... $2n+1$, *et prenant leurs restes par rapport au module* m. *Le dernier de ces résidus est* $n+1$, *et tous les autres peuvent se déduire de celui-ci, en ajoutant successivement les nombres pairs* 2, 4, 6, ..., *et retranchant à chaque fois du résultat le module, si cela se peut.*

En effet, le carré du dernier de ces nombres, $2n+1$, est $4n^2+4n+1=n(4n+3)+n+1$; le reste de ce carré, par rapport au module $4n+3$, est donc $n+1$. D'autre part, le nombre qui vient μ rangs avant $2n+1$ est $2n+1-\mu$ ou $2n+2-\mu-1$; son carré est

$$(2n+2-\mu)^2-2(2n+2-\mu)+1=(2n+2-\mu)^2-(4n+3)+2\mu;$$

il est donc congru au carré du nombre qui vient après celui que l'on considère augmenté de 2μ. Si donc ou parcourt les résidus en sens inverse du sens adopté antérieurement, le premier de tous est $n+1$, le second s'obtient en ajoutant 2 à celui-ci ; le troisième, en ajoutant 4 au nouveau résidu, etc., et en retranchant du résultat, le module, quand cela se peut.

Il y a donc encore ici deux moyens d'avoir les résidus de $m=4n+3$: 1° partir de 1, et ajouter successivement les nombres impairs 3, 5, 7, ... ; 2° partir de $n+1$ et ajouter successivement les nombres pairs 2, 4, 6, ... ; chaque résultat, bien entendu, étant ramené au-dessous du module, par la soustraction de ce module, s'il y a lieu.

3° On établira d'une façon aussi aisée que *si* m *est simplement pair* (*le double d'un nombre impair*), *le dernier des résidus obtenus par le procédé habituel est* $\frac{m}{2}$, *et que les autres se déduisent de celui-ci par l'addition de* 1, *puis de* 3, *puis de* 5, *etc.* ; *si* m *est*

doublement pair (multiple de 4), le dernier des résidus obtenus par le procédé habituel est 0, et que les autres se déduisent de celui-ci par l'addition de 1, puis de 3, puis de 5, etc. Dans ce dernier cas, la suite des résidus est donc *réversible* : chacun d'eux se reproduit au moins deux fois, à égale distance des extrêmes. Bien entendu que l'on ramène chacun des résultats au-dessous du module, par la soustraction du module, s'il y a lieu, et que l'on écrit les résidus tels qu'on les trouve, sans altérer leur ordre, et sans craindre de les répéter plusieurs fois.

Exemples : Les résidus de 10 sont les restes des carrés des nombres 1, 2, 3, 4, 5. Ce sont

$$1, 4, 9, 6, 5.$$

Si on les écrit dans l'ordre inverse, 5, 6, 9, 4, 1, on a $6 = 5 + 1$, $9 = 6 + 3$, 4 ou $14 = 9 + 5$, 1 ou $21 = 14 + 7$.

Les résidus de 20 sont les restes des carrés des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Ce sont

$$1, 4, 9, 16, 5, 16, 9, 4, 1, 0.$$

On voit bien qu'en supprimant le dernier résidu, 0, ce qu'il ne faut du reste jamais oublier, la suite est réversible.

4° *En désignant par* m *un nombre entier quelconque autre que 3, 4 et 9, il y a toujours dans la seconde moitié de l'ensemble* 1, 2, 3, ..., m — 1, *c'est-à-dire parmi les nombres* $\frac{m+1}{2}$, $\frac{m+3}{2}$, ..., m — 1, *si* m *est impair, ou parmi les nombres* $\frac{m}{2}$, $\frac{m}{2}+1$, ..., m — 1, *si* m *est pair, au moins un carré.*

Supposons m impair et désignons par h la racine carrée à une unité près de $\frac{m-1}{2}$; nous aurons

$$h^2 \leqslant \frac{m-1}{2} < (h+1)^2,$$

et tout revient à montrer que $(h+1)^2$ est inférieur à m. Or $(h+1)^2 = h^2 + 2h + 1$, et h^2 ne dépasse pas $\frac{m-1}{2}$; il suffit donc d'établir que $2h+1$ est inférieur à l'autre portion de m, $\frac{m+1}{2}$; on doit donc avoir $2h+1 < \frac{m+1}{2}$ ou $h < \frac{m-1}{4}$ ou $h^2 < \frac{(m-1)^2}{16}$. Mais ceci aura nécessairement lieu si $\frac{(m-1)^2}{16}$ surpasse $\frac{m-1}{2}$, puisque h^2 ne dépasse pas ce nombre. Le théorème est donc vrai pour tous les nombres impairs

qui vérifient l'inégalité

$$\frac{(m-1)^2}{16} > \frac{m-1}{2}$$

ou $$m^2 - 2m + 1 > 8m - 8$$

ou $$m^2 - 10m + 9 > 0\,;$$

Or cette inégalité peut s'écrire

$$m(m-10) + 9 > 0\,;$$

elle a toujours lieu, dès que m dépasse 9. Pour $m = 5$ ou $m = 7$, on a les suites

$$1,\ 2,\ 3,\ 4\,; \qquad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$$

et le théorème est vrai. Pour $m = 3$ ou $m = 9$, on a les suites 1, 2 ; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et le théorème est en défaut.

Supposons m pair, et désignons par h la racine carrée à une unité près de $\frac{m}{2} - 1$; nous aurons $h^2 \leqslant \frac{m}{2} - 1 < (h+1)^2$. On doit donc avoir $(h+1)^2 < m$, et, comme h^2 ne surpasse pas $\frac{m}{2} - 1$, $2h + 1 < \frac{m}{2} + 1$ ou $h < \frac{m}{4}$, $h^2 < \frac{m^2}{16}$. Ceci aura lieu nécessairement si $\frac{m^2}{16}$ est plus grand que $\frac{m}{2} - 1$, c'est-à-dire pour tous les nombres pairs qui vérifient l'inégalité

$$m^2 > 8m - 16$$

ou $$m^2 - 8m + 16 > 0.$$

Cette inégalité a toujours lieu, sauf pour $m = 4$, et, pour cette valeur, le théorème proposé est en défaut : la suite 1, 2, 3 ne renferme d'ailleurs aucun carré.

Si, dans le cas de m pair, on fait commencer la seconde moitié à $\frac{m}{2} + 1$, comme cela a déjà été fait dans ce qui précède, le théorème énoncé est en défaut pour $m = 2$, $m = 4$, $m = 8$.

Il résulte de ce théorème que, *sauf les cas d'exception signalés, il y a toujours des résidus de* m *dans la seconde moitié de l'ensemble* 1, 2, 3, ..., m — 1. A ce nouveau point de vue, le cas de $m = 9$ cesse d'être exceptionnel, car 7 est résidu.

* 137. **Résidus des modules premiers.** — Nous laisserons de côté le module 2, car il est évident que les nombres inférieurs à 2 sont résidus ; on a, en effet, $0 \equiv 4 \equiv 16 \equiv \ldots\ldots$ (mod. 2) et $1 \equiv 1 \equiv 9 \equiv 25 \equiv \ldots\ldots$ (mod. 2).

Le nombre 0 est toujours résidu ; mais ce résidu particulier

n'obéit pas aux mêmes lois que les autres, et, pour cette raison, il n'en sera pas plus question ici que dans ce qui précède.

Pour les modules premiers impairs, les seuls dont nous voulions nous occuper ici, le théorème suivant est fondamental :

Si p *désigne un nombre premier impair, l'ensemble des nombres inférieurs à* p *et non nuls,* 1, 2, 3, ... p — 1, *contient* $\frac{p-1}{2}$ *résidus et* $\frac{p-1}{2}$ *non résidus.*

Nous avons vu que les carrés, 1^2, 2^2, 3^2, ..., $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, donnent, par rapport au module p, les mêmes restes que $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{p+3}{2}\right)^2$, ..., $(p-1)^2$. Il suffit donc d'étudier les restes des premiers carrés et de montrer qu'ils sont distincts les uns des autres. A cet effet, considérons deux de ces carrés, a^2 et b^2, leur différence est $(b-a)(b+a)$; elle n'est pas divisible par p, puisque chacun des facteurs qui la composent est inférieur à p (a et b sont en effet deux nombres différents de la première moitié, $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$) ; donc a^2 et b^2 donnent des restes différents.

Parmi ces résidus, il y en a toujours dans la seconde moitié de l'ensemble 1, 2, 3, ..., $p-1$, sauf pour $p = 3$. Si on remplace chacun de ceux-ci par son complément au module, affecté du signe —, on voit que les résidus d'un nombre premier p, sont $\frac{p-1}{2}$ nombres positifs ou négatifs dont les valeurs absolues sont prises dans la suite 1, 2, 3, ..., $\frac{p-1}{2}$.

Le produit de deux résidus est un résidu ou est congru à un résidu.

Ce théorème est vrai pour un module quelconque, premier ou non premier ; soient en effet deux nombres quelconques a et b, pris parmi les résidus ; on a $a \equiv A^2$ (mod. m) et $b \equiv B^2$ (mod. m) ; d'où $ab \equiv A^2B^2$ (mod. m), ce qui démontre le théorème.

Le produit d'un résidu par un non-résidu est un non-résidu ou est congru à un non-résidu.

Le théorème actuel n'est pas vrai pour un module non premier. Ainsi 4 est résidu de 20, 6 est non-résidu et cependant le produit $6 \times 4 = 24$ est congru à 4, qui est résidu.

Supposons donc que le module, p, soit un nombre premier absolu, et désignons par r un de ses résidus. Il est facile de voir que les produits par r de tous les nombres de l'ensemble 1, 2, 3, ..., $p-1$, les nombres, r, $2r$, $3r$, ..., $(p-1)r$, sont in-

congrus suivant le module p, c'est-à-dire ont des restes tous différents par rapport à ce module ; car deux d'entre eux, ar et br, ont pour différence $r(b-a)$, nombre non divisible par p, puisque chacun des deux facteurs qui le composent est inférieur à p, et que p est premier. Les nombres $r, 2r, 3r, \ldots\ldots, (p-1)r$ sont donc congrus aux nombres $1, 2, 3, \ldots\ldots, p-1$, écrits dans un certain ordre ; or, parmi tous ces produits, ceux de r par les résidus de p donnent des résidus ; il y en a $\frac{p-1}{2}$; les autres donnent donc les non-résidus.

Conséquence. — Les produits des non-résidus par un résidu quelconque sont donc respectivement congrus aux non-résidus, écrits dans un certain ordre.

Le produit de deux non-résidus est un résidu ou est congru à un résidu.

De même que le précédent, le théorème actuel n'est pas vrai pour un module non premier. Ainsi 6 et 7 sont non-résidus de 20; leur produit, 42, est congru à un non-résidu, 2.

Supposons donc que le module p soit un nombre premier absolu, et désignons par n un non-résidu de p. Nous montrerons aussi aisément que dans le raisonnement précédent que les produits par n des nombres de l'ensemble $1, 2, 3, \ldots, p-1$, les nombres $n, 2n, 3n, \ldots, (p-1)n$, sont incongrus suivant le module p, c'est-à-dire donnent pour restes les nombres $1, 2, 3, \ldots, p-1$, écrits dans un certain ordre. Or parmi tous ces produits, ceux de n par les résidus donnent les non-résidus ; les autres donnent donc les résidus.

Conséquences. — Les produits des résidus par un non-résidu quelconque sont respectivement congrus aux non-résidus, écrits dans un certain ordre.

Les produits des non-résidus par un non-résidu quelconque sont respectivement congrus aux résidus, écrits dans un certain ordre.

De même, les produits des résidus par un résidu quelconque sont respectivement congrus aux résidus, écrits dans un certain ordre.

Si on considère un produit d'un nombre quelconque de facteurs, ce nombre est congru à un résidu ou à un non-résidu d'un nombre premier quelconque, p, suivant qu'il y a un nombre pair ou impair de ces facteurs congrus à des non-résidus de p.

Le produit de 2 par $\frac{p+1}{2}$ est congru à un résidu; de même le produit de -2 par $\frac{p-1}{2}$; donc 2 et $\frac{p+1}{2}$ sont rési-

dus ou non-résidus en même temps ; de même -2 et $\frac{p-1}{2}$ sont de même espèce.

Table des résidus des modules premiers inférieurs à 100.

Modules	Résidus
2	1
3	1
5	1, 4
7	1, 2, 4
11	1, 3, 4, 5, 9
13	1, 3, 4, 9, 10, 12
17	1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16
19	1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16, 17
23	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18
29	1, 4, 5, 6, 7, 9, 13, 16, 20, 22, 23, 24, 25, 28
31	1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 14, 16, 18, 19, 20, 25, 28
37	1, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 16, 21, 25, 26, 27, 28, 30, 33, 34, 36
41	1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 31, 32, 33, 36, 37, 39, 40
43	1, 4, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 23, 24, 25, 31, 35, 36, 38, 40, 41
47	1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 17, 18, 21, 24, 25, 27, 28, 32, 34, 36, 37, 42
53	1, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 24, 25, 28, 29, 36, 37, 38, 40, 42, 43, 44, 46, 47, 49, 52
59	1, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 29, 35, 36, 41, 45, 46, 48, 49, 51, 53, 57
61	1, 3, 4, 5, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 22, 25, 27, 34, 36, 39, 41, 42, 45, 46, 47, 48, 49, 52, 56, 57, 58, 60
67	1, 4, 6, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 25. 26, 29, 33, 35, 36, 37, 39, 40, 47, 49, 54, 55, 56, 59 60, 62, 64, 65
71	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 20, 24, 25, 27, 29, 30, 32, 36, 37, 38, 40, 43, 45, 48, 49, 50, 54, 57, 58, 60, 64
73	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 19, 23, 24, 25, 27, 32, 35, 36, 37, 38, 41, 46, 48, 49, 50, 54, 55, 57, 61, 64, 65, 67, 69, 70, 71, 72

Modules	Résidus
79	1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 31, 32, 36, 38, 40, 42, 44, 45, 46, 49, 50, 51, 52, 55, 62, 64, 65, 67, 72, 73, 76
83	1, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 16, 17, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 36, 37, 38, 40, 41, 44, 48, 49, 51, 59, 61, 63, 64, 65, 68, 69, 70, 75, 77, 78, 81
89	1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 25, 32, 34, 36, 39, 40, 42, 44, 45, 47, 49, 50, 53, 55, 57, 64, 67, 68, 69, 71, 72, 73, 78, 79, 80, 81, 84, 85, 87, 88
97	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 18, 22, 24, 25, 27, 31, 32, 33, 35, 36, 43, 44, 47, 48, 49, 50, 53, 54, 61, 62, 64, 65, 66, 70, 72, 73, 75, 79, 81, 85, 86, 88, 89, 91, 93, 94, 95, 96.

138. Du résidu -1. Résidus minima. — Si p est un nombre premier de la forme $4n+1$, $\frac{p-1}{2}=2n$; le nombre des résidus est donc pair.

Si p est un nombre premier de la forme $4n+3$, $\frac{p-1}{2}=2n+1$; le nombre des résidus est impair.

Cela posé, rappelons que si, dans l'ensemble $1, 2, 3, \ldots, p-1$, on met à part les deux nombres 1 et $p-1$, les autres nombres, $2, 3, \ldots, p-2$, peuvent être associés deux à deux de façon que chaque couple de nombres associés, a et a', vérifie la congruence $aa' \equiv 1$ (mod. p) (n° 99).

Deux nombres associés, a et a', ont pour produit un nombre congru à un résidu; donc ils sont de même espèce, c'est-à-dire tous deux résidus, ou tous deux non-résidus (n° 137).

Il suit de là que dans l'ensemble $2, 3, \ldots, p-2$, il y a un nombre pair de résidus et aussi un nombre pair de non-résidus. Or des deux nombres qui restent, 1 et $p-1$, le premier est toujours résidu. Si donc p a un nombre pair de résidus, $p-1$ ou -1 est résidu; sinon, ce nombre est non-résidu.

Réciproquement, si -1 est résidu d'un module premier p, ce nombre a un nombre pair de résidus, 1 et -1 ou $p-1$, d'abord, puis ceux de l'ensemble $2, 3, \ldots, p-2$; si -1 est non-résidu, le module p a un nombre impair de résidus. Dans le premier cas, p est de la forme $2 \times 2n+1$ ou $4n+1$, et, dans le second, p est de la forme $2(2n+1)+1$ ou $4n+3$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant, qui est très important:

Le nombre -1 *ou son équivalent* $p-1$ *est résidu de tout nombre premier,* p, *de la forme* $4n+1$, *et non-résidu de tout nombre premier,* p, *de la forme* $4n+3$. *Et réciproquement.*

Ce théorème va nous permettre d'écrire les résidus d'un module premier p d'une manière plus simple que celle adoptée jusqu'ici, et va nous conduire ainsi à d'importantes propriétés. Partageons l'ensemble $1, 2, 3, \ldots, p-1$ en deux moitiés $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ et $\frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2}, \ldots, p-1$; nous savons que dans la seconde moitié, sauf pour $p=3$, il y a toujours au moins un résidu; chacun de ces résidus est plus grand que la moitié de p; il peut se remplacer par son complément à p, précédé du signe —. Si nous agissons ainsi, nous obtiendrons les résidus quadratiques de p, avec les plus petites valeurs absolues qu'ils peuvent avoir, et nous voyons que les résidus quadratiques de p sont des nombres ou tous les nombres de l'ensemble $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$, affectés respectivement soit du signe +, soit du signe —, soit de ces deux signes.

Mais si p est de la forme $4n+1$, -1 est résidu, le produit de -1 par a est résidu ou non-résidu, en même temps que a, les deux nombres $+a$ et $-a$ sont donc toujours de même espèce. Parmi les résidus ne figurent donc que certaines des valeurs absolues $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$, chacune avec les deux signes.

Si, au contraire, p est de la forme $4n+3$, -1 est non-résidu, et les deux nombres a et $-a$ sont toujours d'espèces différentes. Parmi les nombres de l'ensemble, $1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$, le même nombre ne figure qu'une fois comme résidu, avec l'un ou l'autre des signes + ou —, de sorte que les $\frac{p-1}{2}$ résidus sont ces nombres eux-mêmes, affectés respectivement, soit du signe +, soit du signe —.

Exemples. — Les résidus de 29 sont $+1, -1, +4, -4, +5, -5, +6, -6, +7, -7, +9, -9, +13$ et -13.

Les résidus de 31 sont
$1, 2, -3, 4, 5, -6, 7, 8, 9, 10, -11, -12, -13, 14, -15$.

Tout nombre premier, p, *de la forme* $4n+1$, *divise une somme de deux carrés, premiers entre eux.*

Nous venons de voir, en effet, que, pour tout nombre premier, p, de cette forme, le nombre -1 est résidu. On a donc

$$1^2 \equiv 1 \pmod{p},$$
$$a^2 \equiv -1 \pmod{p},$$

et, par suite,

$$a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Tout nombre premier, p, *de la forme* $4n + 3$, *divise une somme de trois carrés, premiers dans leur ensemble.*

Les résidus d'un pareil nombre sont, en effet, les nombres de la suite

$$1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2},$$

affectés tantôt du signe +, tantôt du signe —. Le premier de ces résidus est $+1$, et il y en a sûrement, sauf si $p = 3$, qui ont le signe —; donc il y a certainement deux résidus consécutifs, dans ce nouveau mode de représentation, tels que le premier ait le signe +, et le second, le signe —. Soient alors α et $-\alpha - 1$ ces deux résidus ; ils fournissent les deux congruences

$$a^2 \equiv \alpha \pmod{p},$$
$$b^2 \equiv -\alpha - 1 \pmod{p};$$

d'où l'on déduit, par voie d'addition,

$$a^2 + b^2 \equiv -1 \pmod{p},$$

ou

$$a^2 + b^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Lorsque $p = 3$, on a $p = 1 + 1 + 1$; le théorème est donc encore vrai.

Le nombre premier 2, qui n'est compris dans aucune des deux formes précédentes, est une somme de deux carrés, $2 = 1 + 1$.

* 139. **Critériums d'Euler et de Gauss.** — Soit p un nombre premier impair, $p = 2h + 1$; nous avons vu que dans l'ensemble $2, 3, \ldots, p - 2$, il y a un nombre pair de résidus qui sont deux à deux des nombres associés, puisque 1 et $p - 1 \equiv -1$ sont deux autres résidus si h est pair, et que 1 est le seul autre résidu si h est impair. Cela rappelé, désignons par A le produit de tous les résidus d'un nombre premier impair, p, et par B le produit des non-résidus.

A contient d'abord un produit de couples de nombres associés, puis le facteur 1, si h est impair, et les deux facteurs 1 et -1, si h est pair ; on a donc $A \equiv 1 \pmod{p}$, si h est impair, et $A \equiv -1 \pmod{p}$, si h est pair. De même, B est un produit de couples de nombres associés, si h est pair, et c'est un pareil produit, multiplié par -1, si h est impair; on a donc $B \equiv -1 \pmod{p}$ si h est impair, et $B \equiv 1 \pmod{p}$, si h est pair. Dans tous les cas, on a $A \equiv -B \pmod{p}$ ou $A + B \equiv 0 \pmod{p}$, et aussi $AB \equiv -1$ ou $AB + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Cette seconde congruence a déjà été établie (n° 99) et n'est pas autre chose que la traduction du théorème de Wilson.

Si nous considérons alors un résidu quelconque de p, r, les produits de tous les résidus de p par r sont respectivement congrus aux divers résidus de p, écrits dans un certain ordre ; de même, les produits de tous les non-résidus de p par r sont respectivement congrus aux non-résidus de p, écrits dans un certain ordre (n° 137). Multiplions entre eux tous les produits de première espèce, nous aurons $Ar^h \equiv A \pmod{p}$, $\left(h = \frac{p-1}{2}\right)$; multiplions de même entre eux tous ceux de seconde espèce, nous aurons $Br^h \equiv B \pmod{p}$. Ces deux congruences peuvent s'écrire $A(r^h - 1) = \text{mult. } p$, et $B(r^h - 1) = \text{mult. de } p$; comme A et B sont des produits de nombres inférieurs à p, ils sont tous deux premiers avec p, et l'on est conduit, aussi bien par l'une que par l'autre de ces égalités, à affirmer que $r^h - 1$ est divisible par p, ou que $r^h \equiv 1 \pmod{p}$.

Considérons maintenant un non-résidu quelconque de p, n; les produits de tous les résidus de p par n sont respectivement congrus aux non-résidus de p, écrits dans un certain ordre ; en multipliant tous ces produits entre eux on a donc $An^h \equiv B \pmod{p}$; les produits de tous les non-résidus de p par n sont respectivement congrus aux résidus de p, écrits dans un certain ordre ; on a donc $Bn^h \equiv A \pmod{p}$. Or $B \equiv -A \pmod{p}$; les deux congruences obtenues peuvent donc s'écrire

$$An^h \equiv -A \pmod{p} \qquad \text{et} \qquad Bn^h \equiv -B \pmod{p}.$$

Comme A et B sont premiers avec p, chacune d'elles entraîne la congruence $n^h \equiv -1 \pmod{p}$.

Réciproquement, si un nombre entier e, inférieur à p, satisfait à la congruence $e^h \equiv 1 \pmod{p}$, il est résidu de p ; s'il satisfait à la congruence $e^h \equiv -1 \pmod{p}$, il est non-résidu de p. En effet, dans le premier cas, e ne peut pas être non-résidu, sans quoi on aurait à la fois $e^h \equiv 1$, $e^h \equiv -1 \pmod{p}$; d'où $2 \equiv 0 \pmod{p}$, ce qui ne peut arriver que pour le nombre premier 2, cas exclu. Un raisonnement analogue s'applique au second cas. Nous pouvons énoncer maintenant le théorème que voici :

Critérium d'Euler. — *On reconnaît qu'un nombre entier* e, *inférieur à* p, *nombre premier impair, est résidu ou non-résidu de* p, *suivant que l'on a* $e^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ *ou* $e^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

Le nombre 0, considéré comme résidu, ne satisfait pas à ce théorème. Les théorèmes concernant les produits de résidus et de non-résidus, n'auraient de même aucun sens, si on les appliquait à l'ensemble total des nombres entiers inférieurs à p, 0 compris. Car tout produit qui contient le facteur 0 est nul et devrait être regardé comme un résidu.

Ce que nous venons de dire suffit pour faire comprendre pourquoi le résidu 0 a été exclu des considérations antérieures.

Occupons-nous maintenant d'un second critérium dû à Gauss.

Ce critérium s'obtient sans peine en partant de la remarque suivante : *Si* p *désigne un nombre premier impair et* e *un entier plus petit que* p, *les produits par* e *des nombres* 1, 2, 3,....., $\frac{p-1}{2}$, *ont des restes différents relativement au module* p, *et leurs restes minima ont des valeurs absolues différentes.*

Soient, en effet, eh et ek deux de ces produits ; leur différence, $(k-h)e$, n'est pas divisible par p, puisqu'aucun de ses facteurs n'est divisible par $p(e<p,\ k-h<p)$; les restes fournis par ces deux produits sont donc distincts. Supposons maintenant que l'un de ces produits, eh, ait un reste minimum positif, r, et que l'autre ait un reste minimum négatif, $-\rho$; nous aurons

$$eh \equiv r \pmod{p}$$

et

$$ek \equiv -\rho \pmod{p};$$

si r était égal à ρ, on aurait $e(h+k) \equiv 0 \pmod{p}$; mais ceci n'est pas possible, puisque e et $h+k$ sont tous deux plus petits que p.

D'ailleurs les restes minima sont au plus égaux à $\frac{p-1}{2}$, puisque p est impair ; donc les $\frac{p-1}{2}$ restes minima que l'on obtient ainsi sont les nombres 1, 2, 3, ..., $\frac{p-1}{2}$, affectés respectivement soit du signe +, soit du signe —. Désignons par P le produit des nombres positifs 1, 2, 3, ..., $\frac{p-1}{2}$ et par μ le nombre des restes minima négatifs ; nous aurons alors, en multipliant tous les produits signalés entre eux, $Pe^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\mu} P \pmod{p}$; d'où $e^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\mu} \pmod{p}$; e est donc résidu ou non-résidu, suivant que μ est pair ou impair.

Critérium de Gauss. — *On reconnaît qu'un nombre* e, *inférieur à un nombre premier impair,* p, *est résidu ou non-résidu de* p, *à ce que, parmi les produits* e, 2e, 3e, ..., $\frac{p-1}{2}$e, *il y en a un nombre pair ou impair qui donnent des restes supérieurs à* $\frac{p-1}{2}$.

Le critérium d'Euler appliqué au nombre —1, nous donne $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$, quand le nombre premier p est de la forme

$4n+1$, et $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$, quand le nombre premier p est de la forme $4n+3$. On retombe ainsi sur le théorème du paragraphe précédent, concernant le nombre -1.

Quel que soit l'entier e, inférieur à un nombre premier impair, p, on a $e^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1$ (mod. p). En élevant au carré les deux termes de cette congruence, on a $e^{p-1} \equiv 1$ (mod. p). On retrouve ainsi le théorème de Fermat.

Appliquons le critérium de Gauss au nombre 2. Pour cela cherchons combien il y a parmi les nombres $2, 4, 6, \ldots, 2 \times \frac{p-1}{2}$ ou $p-1$, de restes supérieurs à $\frac{p-1}{2}$. Tous ces nombres sont des restes; ils vont en augmentant; le dernier d'entre eux est supérieur à $\frac{p-1}{2}$; il suffit donc de connaître le premier reste supérieur à $\frac{p-1}{2}$ pour avoir le nombre de ceux qui jouissent de cette propriété. Désignons ce nombre par $2(k+1)$; le précédent sera $2k$ et nous aurons

$$2k \leqslant \frac{p-1}{2} < 2(k+1),$$

ou

$$k \leqslant \frac{p-1}{4} < k+1;$$

le nombre k désigne donc la partie entière de $\frac{p-1}{4}$, $k = \mathrm{E}\left(\frac{p-1}{4}\right)$. Or le nombre total des restes est $\frac{p-1}{2}$, celui des restes $2, 4, 6, \ldots\ldots, 2k$ est égal à k ou à $\mathrm{E}\left(\frac{p-1}{4}\right)$. Il y a donc $\frac{p-1}{2} - \mathrm{E}\left(\frac{p-1}{4}\right)$ restes supérieurs à $\frac{p-1}{2}$; le nombre μ dont nous avons parlé dans le critérium de Gauss est donné par la formule $\mu = \frac{p-1}{2} - \mathrm{E}\left(\frac{p-1}{4}\right)$.

Il est alors facile d'avoir, dans chaque cas, la parité du nombre μ; il suffit, pour cela, de se rappeler que le nombre premier p est de la forme $4n+1$ ou $4n+3$, et que $\frac{p-1}{4}$ a pour partie entière n. On a donc

$$\mu = 2n - n = n, \text{ dans le premier cas,}$$

et

$$\mu = 2n+1 - n = n+1, \text{ dans le second.}$$

Si donc n est pair, $n = 2m$, le premier nombre μ est pair, le second est impair. Si n est impair, le premier nombre μ est impair, le second est pair. Nous voyons donc que

2 *est résidu de tout nombre premier de la forme* $8m+1$ *ou* $8m+7$, *et non-résidu de tout nombre premier de la forme* $8m+3$ *ou* $8m+5$.

Il serait facile d'avoir maintenant les résultats concernant le nombre -2 : il suffit de se rappeler que $-2=(-1).2$ et de combiner les résultats relatifs au nombre 2 avec ceux qui sont relatifs au nombre -1. Mais nous sommes déjà entré dans trop de détails.

* **140. Théorème de Bachet.** — Ce théorème, l'un des plus beaux de l'Arithmétique, s'énonce de la manière suivante :

Tout nombre entier est une somme de quatre carrés entiers, au plus.

La démonstration de ce théorème découle des principes qui précèdent et de quelques propositions accessoires qu'il nous reste à établir.

1° *Le produit d'une somme de deux carrés par une somme de deux carrés est une somme de deux carrés.*

Cela résulte de l'égalité

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=(aa'+bb')^2+(ab'-ba')^2,$$

qui se vérifie immédiatement.

On peut écrire aussi

$$(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2.$$

2° *Le produit d'une somme de quatre carrés par une somme de quatre carrés est une somme de quatre carrés.*

Cela résulte de l'égalité

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)=A^2+B^2+C^2+D^2, \quad (*)$$

dans laquelle A, B, C, D désignent les nombres

$$A=aa'+bb'+cc'+dd',$$
$$B=ab'-ba'+cd'-dc',$$
$$C=ac'-bd'-ca'+db',$$
$$D=ad'+bc'-cb'-da'.$$

Les procédés directs pour établir cette égalité remarquable nous manquent, et nous devons nous borner à la vérifier, en développant les calculs, d'après les règles qui donnent le produit des sommes algébriques, et la somme de plusieurs sommes algébriques.

(*) Identité due à Euler, à qui on doit, d'ailleurs, aussi le principe de la démonstration que nous donnons ici.

3° *Tout nombre premier impair* p *qui divise une somme de quatre carrés dont un au moins n'est pas divisible par* p, *est lui-même une somme de quatre carrés, au plus.*

Nous ne supposons pas que le nombre des carrés soit effectivement quatre, certains d'entre eux pourront être nuls ; mais nous ne supposerons pas qu'il y en ait plus de deux qui soient nuls ; car il est évident que tout nombre entier divise un seul carré, son propre carré, et que cela ne peut conduire à aucune propriété concernant le nombre étudié.

Soient alors A, B, C, D les quatre nombres indiqués et tels que $A^2+B^2+C^2+D^2$ soit divisible par p; prenons les restes minima positifs ou négatifs de ces quatre nombres par rapport au module p et représentons-les par a, b, c, d. Ces quatre nombres ne sont pas nuls par hypothèse, et nous avons les diverses relations suivantes, dans lesquelles mp désigne toujours un multiple de p :

$$A = mp + a, \qquad B = mp + b, \qquad C = mp + c, \qquad D = mp + d,$$

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = mp + a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Il résulte de cette dernière égalité et de l'hypothèse faite que p divise $a^2+b^2+c^2+d^2$; par suite on a la relation

$$(1) \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = pq,$$

où q désigne un nombre entier non nul.

D'autre part, p étant impair, on a aussi

$$2\,|\,a\,| < p, \qquad 2\,|\,b\,| < p, \qquad 2\,|\,c\,| < p, \qquad 2\,|\,d\,| < p,$$

et, par suite,

$$4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < 4p^2.$$

ou

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < p^2;$$

donc q est plus petit que p.

Si q est égal à 1, le théorème est démontré. Sinon, nous prenons les restes minima, positifs ou négatifs, de a, b, c, d par rapport au module q, et nous écrivons

$$a = qf + \alpha, \qquad b = qg + \beta, \qquad c = qh + \gamma, \qquad d = qk + \delta,$$

puis

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = mq + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2.$$

Cette relation, jointe à la relation (1), nous montre que

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ est divisible par q, et nous pouvons poser

$$(2) \qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 = qq'.$$

Montrons d'abord que q' n'est pas nul : si cela était, α, β, γ, δ seraient nuls tous les quatre et a, b, c, d seraient tous divisibles par q ; mais alors $a^2+b^2+c^2+d^2$ serait divisible par q^2 et, d'après la relation (1), on aurait

$$(f^2+g^2+h^2+k^2)q = p\,;$$

le nombre premier p serait divisible par q, ce qui est impossible puisque q est plus petit que p et plus grand que 1. Nous allons montrer maintenant que q' est moindre que q : pour cela nous nous appuyons sur les inégalités

$$2\,|\,\alpha\,| \leqq q, \qquad 2\,|\,\beta\,| \leqq q, \qquad 2\,|\,\gamma\,| \leqq q, \qquad 2\,|\,\delta\,| \leqq q,$$

qui nous conduisent à

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \leqq q^2,$$

puis, à cause de (2),

à
$$q' \leqq q\,;$$

l'égalité n'est pas possible, car il faudrait pour cela que $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{q}{2}$, et alors

$$a = \frac{q}{2}(2f+1), \qquad b = \frac{q}{2}(2g+1),$$

$$c = \frac{q}{2}(2h+1), \qquad d = \frac{q}{2}(2k+1),$$

on aurait donc

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = q^2(f^2+g^2+h^2+k^2+f+g+h+k)+q^2,$$

et dès lors, à cause de l'égalité (1),

$$q(f^2+g^2+h^2+k^2+f+g+h+k+1) = p,$$

ce qui nous conduit à la même impossibilité que précédemment : p divisible par q. Nous avons donc bien $0 < q' < q$.

Multiplions entre elles les égalités (1) et (2) et transformons le premier membre de la nouvelle relation par l'identité d'Euler ;

nous aurons successivement

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)=pq^2q',$$

$$A'^2+B'^2+C'^2+D'^2=pq^2q',$$

avec

$$A'=a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta,$$

$$B'=a\beta-b\alpha-c\delta+d\gamma,$$

$$C'=a\gamma+b\delta-c\alpha-d\beta,$$

$$D'=a\delta-b\gamma+c\beta-d\alpha.$$

Si nous remplaçons maintenant, dans ces expressions, a, b, c, d par leurs valeurs en fonction du module q, nous avons

$$A'=q(f\alpha+g\beta+h\gamma+k\delta)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2,$$

ou

$$A'=q(f\alpha+g\beta+h\gamma+k\delta+q')$$

$$B'=q(f\beta-g\alpha-h\delta+k\gamma),$$

$$C'=q(f\gamma+g\delta-h\alpha-k\beta),$$

$$D'=q(f\delta-g\gamma+h\beta-k\alpha),$$

et nous voyons que les quatre nombres A', B', C', D' sont divisibles par q ; si donc nous désignons les facteurs qui multiplient q dans ces nombres ou plutôt, leurs valeurs absolues, par a', b', c', d', nous aurons

$$(3)\qquad a'^2+b'^2+c'^2+d'^2=pq'.$$

Si q' est égal à 1, la proposition est vérifiée. Sinon, nous remarquons que pour transformer l'égalité (1) à l'aide de (2), nous avons simplement supposé $1<q<p$ et p premier ; l'égalité (3) peut donc être traitée de la même façon et nous conduira à une nouvelle égalité du même genre

$$a''^2+b''^2+c''^2+d''^2=pq'',$$

avec $0<q''<q'$. Et ainsi de suite.

Les nombres q, q', q'', ... vont en diminuant sans que l'un d'eux devienne nul ; donc il y en a un qui devient égal à 1 et la proposition est établie.

Ce théorème une fois établi, rien n'est plus facile à démontrer que le théorème suivant :

Tout nombre premier est une somme de quatre carrés entiers, au plus.

En effet, on a $2 = 1^2 + 1^2$, $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$; d'autre part, nous avons vu que tout nombre premier de la forme $4n + 1$, divise une somme de deux carrés, non nuls, et premiers entre eux, $a^2 + 1$; que tout nombre premier de la forme $4n + 3$, divise une somme de trois carrés, non nuls, et premiers dans leur ensemble, $a^2 + b^2 + 1$; donc tout nombre premier divise une somme de quatre carrés, premiers dans leur ensemble, et dont deux, au plus, sont nuls. Il résulte donc du théorème précédent que tout nombre premier est une somme de quatre carrés au plus, dont deux au moins ne sont pas nuls. Cette dernière restriction ne s'applique pas au nombre premier 1, qui a, du reste, été exclu de toutes les considérations précédentes.

Pour démontrer le théorème de Bachet, il suffit maintenant de se rappeler que tout nombre entier est un produit de facteurs premiers, distincts ou non, que chacun d'eux, étant une somme de quatre carrés, au plus, il résulte de 2° que le produit de deux d'entre eux, est une somme de quatre carrés, au plus ; par conséquent le produit de deux des facteurs premiers donnera une somme de quatre carrés, le produit de ce nombre par un troisième facteur donnera une nouvelle somme de quatre carrés ; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit arrivé au produit total, qui est le nombre lui-même.

La démonstration de la proposition 3°, dont le principe est dû à Euler, a été complétée par M. A. Matrot. (Journal de Math. Él. de M. de Longchamps, 1891). Elle a été simplifiée récemment par M. Goulard.

EXERCICES

1° Extraire les racines carrées des nombres

	2704,	5476,	9604,	389376,	978121.
Rép.	52	74,	98,	624,	989.

2° Extraire les racines carrées, à $\frac{1}{100000}$ près, des nombres entiers non carrés parfaits et inférieurs à 20.

3° Extraire, à $\frac{1}{100}$ près, les racines carrées des nombres

	84,825596,	0,1897,	28,532.
Rép.	9,21,	0,43	5,34.

4° Le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence de leurs carrés,

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

5° La différence de deux nombres est 4, la différence de leurs carrés est 56. Trouver ces nombres.

Rép. 9 et 5.

6° Le carré de la différence de deux nombres est égal au carré de leur somme, diminué de quatre fois leur produit :

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab.$$

7° Le carré de la différence de deux nombres est 9, leur produit est 28. Trouver ces deux nombres.

Rép. 7 et 4.

8° Le carré de la somme de deux nombres est 121, la somme de leurs carrés est 65. Trouver ces nombres.

Rép. 7 et 4.

9° Le carré d'un nombre et le carré de son dernier chiffre à droite sont terminés par le même chiffre. — Tout carré est terminé par 0, 1, 4, 5, 6, 9 : il n'y a pas de carrés terminés par 2, 3, 7, 8.

10° Tout carré pair est divisible par 4. Tout carré impair est un multiple de 4, augmenté de 1.

11° Toute somme de deux carrés est un multiple de 4, ou un multiple de 4 augmenté de 1, ou un multiple de 4, augmenté de 2 : il n'y a pas de nombre de la forme $4n+3$ qui soit carré parfait, ni somme de deux carrés.

12° Tout carré parfait admet un nombre impair de diviseurs ; tout nombre non carré admet un nombre pair de diviseurs.

13° Le carré d'un nombre premier, autre que 2 et 3, est un multiple de 24, augmenté de 1.

14° Tout carré pair divisé par 16 donne pour reste 0 ou 4.

15° Le produit de deux nombres entiers consécutifs est divisible par 12, si le plus grand est un carré ; le produit de trois nombres entiers consécutifs est divible par 60, si le nombre intermédiaire est un carré.

16° Le carré d'un nombre entier quelconque est de l'une des formes $5n$, $5n+1$, $5n-1$.

17° Si la somme des carrés de deux nombres premiers entre eux est un carré, le produit de ces nombres est divisible par 6.

18° Trouver les résidus de 25, 0 compris.

Rép. : 0, 1, 4, 6, 9, 11, 14, 16, 19, 21, 24.

19° Par rapport au module p, 2 et $\frac{p+1}{2}$ sont toujours associés.

20° Si p désigne un nombre premier impair, $E\left(\frac{p+1}{4}\right)$ est toujours résidu.

21° Les racines primitives d'un nombre premier impair p, sont comprises dans les non-résidus (n° 77).

22° Si r est racine primitive de p, les nombres $1, r, r^2, \ldots, r^{p-1}$, donnent des restes différents. Le reste qui commence la seconde moitié est -1.

23° Appliquer le critérium d'Euler au nombre 2, par rapport au module 71.

24° Appliquer le critérium de Gauss au nombre 3, par rapport aux modules 13, 23, 17, 19.

25° Démontrer que 3 est résidu des nombres premiers de la forme $12n+1$, $12n+11$ et non-résidu des nombres premiers de la forme $12n+5$, $12n+7$.

26° Tout nombre premier qui divise une somme de deux carrés, premiers entre eux, est lui-même une somme de deux carrés. Tout nombre premier de la forme $4n+1$ est une somme de deux carrés.

27° Tout nombre entier qui ne contient que des facteurs pre-

miers de la forme $4n+1$ est une somme de deux carrés, au plus.

28° Démontrer l'égalité

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2$$
$$=(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2.$$

29° Trouver deux nombres consécutifs connaissant leur produit

30° Trouver deux nombres différant de deux unités, connaissant leur produit.

CHAPITRE II

RACINE CUBIQUE (*)

141. Définition. — On appelle *cube* d'un nombre, le produit de trois facteurs égaux à ce nombre.

Les cubes des nombres entiers forment une suite infinie et croissante,

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, ...

La loi qui permet de déduire chacun d'eux du précédent est assez compliquée ; elle résulte de la formule suivante :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

qui peut encore s'écrire

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

Pour démontrer cette égalité, il n'y a qu'à s'appuyer sur la règle qui donne le produit de deux sommes : on a ainsi successivement

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

et, en multipliant les deux membres par $a+b$,

$$(a+b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 ;$$

il n'y a plus qu'à réunir les termes de même espèce, $2a^2b$ et a^2b, ab^2 et $2ab^2$, pour avoir l'égalité annoncée.

Le résultat que nous venons d'obtenir peut s'énoncer ainsi :

Pour élever une somme au cube, on prend la somme des cubes des deux parties de cette somme, puis, on lui ajoute trois fois le produit de ces deux parties par leur somme.

(*) La racine cubique ne figure pas au programme officiel de la classe de mathématiques élémentaires, mais comme elle est néanmoins traitée dans la plupart des cours de mathématiques élémentaires, nous n'avons pas cru devoir imprimer ce chapitre en petits caractères.

Exemple. $7 = 5 + 2$; on a donc $7^3 = (5+2)^3$ ou

$$7^3 = 125 + 8 + 30 \times 7 = 125 + 8 + 210 = 343.$$

Considérons alors deux nombres entiers consécutifs, n et $n+1$; nous voyons de suite que le cube du second est $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. Le cube d'un nombre entier est donc égal au cube de celui qui le précède immédiatement, augmenté de trois fois le carré de ce nombre, puis de trois fois ce nombre, et de un.

Si donc nous savions former les nombres de la forme $3n^2 + 3n + 1$, où n prend toutes les valeurs entières, à partir de 0, nous pourrions obtenir les cubes des nombres entiers successifs, par voie d'addition. Or deux nombres consécutifs de cette espèce sont

$$3n^2 + 3n + 1 \quad \text{et} \quad 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 ;$$

le second est égal au premier augmenté de $6n + 6$. Chacun des nouveaux nombres est égal au précédent augmenté de 6. Nous pouvons donc former le tableau suivant :

NOMBRES DE LA FORME

$6n+6$	$3n^2+3n+1$,	n^3	n
6	1	0	0
12	7	1	1
18	19	8	2
24	37	27	3
30	61	64	4
36	91	125	5
42	127	216	6
48	169	343	7
54	217	512	8
60	271	729	9
66	331	1000	10
72	397	1331	11
78	469	1728	12

La première colonne de ce tableau contient les nombres de la forme $6n+6$; elle commence au nombre 6 et chacun des nombres qu'elle contient s'obtient en ajoutant 6 au nombre qui est au-dessus de lui. La seconde colonne contient les nombres de la forme $3n^2+3n+1$: elle commence au nombre 1, et chacun des nombres qu'elle contient s'obtient en ajoutant à celui qui est au-dessus de lui, le nombre placé dans la première colonne et sur la même ligne que celui-ci. La troisième colonne se déduit de la seconde par le même procédé.

La suite des cubes des nombres entiers est donc une suite croissante et même rapidement croissante, et qui ne contient pas tous les nombres entiers.

Cela posé, on appelle *racine cubique* d'un nombre entier, A, un autre nombre entier a, qui, élevé au cube, reproduit le nombre A.— L'opération qui permet de trouver ce nombre s'appelle elle-même une *extraction de racine cubique*.

L'opération ainsi définie est rarement possible, car un nombre entier, A, choisi arbitrairement, n'est pas, en général, un cube.

Mais si A n'est pas un nombre de la suite des cubes, il est compris entre deux nombres de cette suite, consécutifs, a^3 et $(a+1)^3$; de sorte que, dans tous les cas, quel que soit l'entier A, on a toujours, pour une certaine valeur de l'entier a, la double inégalité qui suit :

$$a^3 \leqslant A < (a+1)^3.$$

Nous appellerons *racine cubique à une unité près* d'un nombre entier quelconque, A, la racine cubique du plus grand cube contenu dans ce nombre. — Il résulte des explications précédentes, que cette racine cubique est le nombre a qui figure dans la double inégalité écrite plus haut.

La différence entre le nombre A et le plus grand cube, a^3, qui figure dans ce nombre, se nomme le *reste* de l'opération qui a pour but de déterminer a.

Lorsque l'opération se fait sans reste, le nombre A est dit *cube parfait.*

D'après les inégalités précédentes, la différence $A - a^3$ est plus petite que la différence $(a+1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1$. Donc *le reste est plus petit que le triple carré de la racine, augmenté du triple de cette racine et de un.*

La plupart des définitions précédentes s'appliquent immédiatement aux nombres fractionnaires.

Un nombre fractionnaire est dit *cube parfait* lorqu'on peut l'obtenir en élevant un autre nombre fractionnaire au cube. — Si cela arrive, le nouveau nombre fractionnaire s'appelle la *racine cubique* du premier. — Mais cela n'arrive pas, en général, et nous définirons plus tard des racines cubiques approchées.

142. Racine cubique à une unité près.

1er cas. — *Le nombre donné est inférieur à* 1000. — Alors la racine cubique à une unité près est inférieure à 10; elle est immédiatement fournie par la suite des cubes des neuf premiers nombres entiers

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Exemples. — La racine cubique de 343 est 7. Le plus grand cube contenu dans 427 est 343, et la racine cubique est 7; le reste de l'opération est $427 - 343 = 84$. Le nombre 915 a pour racine cubique 9, et le reste est 186.

2e cas. — *Le nombre donné* A *est supérieur à* 1000. — Alors 10 est parmi les nombres dont les cubes sont plus petits que A; la racine cubique de A est donc au moins égale à 10, et se compose de dizaines et d'unités. Soient a le nombre des dizaines et b celui des unités de la racine; la racine cubique peut s'écrire $a+b$, à condition de penser que a désigne des dizaines. Or le cube de $a+b$ se compose d'abord du cube de a, qui est un nombre exact de milles, de trois fois le carré des dizaines par les unités, de

trois fois les dizaines par le carré des unités et du cube des unités. Comme le cube de $a+b$ est contenu dans A et qu'il y a encore un reste, non nul, en général, on voit que le cube du nombre des dizaines de la racine est contenu dans les milles du nombre A. Mais nous allons montrer, ce qui n'est pas évident d'après ce qui précède, que *le nombre des dizaines de la racine cubique à une unité près d'un nombre* A *est la racine cubique à une unité près du nombre des milles de* A.

Désignons, en effet, par A_1 le nombre des milles de A et par A_2 la partie restante; désignons, en outre, par x la racine cubique à une unité près de A_1; nous aurons

$$x^3 \leqslant A_1 < (x+1)^3,$$

et, en multipliant ces trois nombres par 1000,

$$(10x)^3 \leqslant 1000A_1 < [10(x+1)]^3.$$

On a donc sûrement $(10x)^3 \leqslant 1000A_1+A_2$, c'est-à-dire $(10x)^3 \leqslant A$; d'autre part, $[10(x+1)]^3$ est supérieur à $1000A_1$; donc ce nombre de milles surpasse le nombre des milles de A d'au moins une unité de cet ordre; on a, par conséquent, $[10(x+1)]^3 \geqslant 1000A_1+1000$, et, par suite, $[10(x+1)]^3 > 1000A_1+A_2$, puisque A_2 est plus petit que 1000. On a donc finalement

$$(10x)^3 \leqslant A < [10(x+1)]^3.$$

La racine cubique à une unité près du nombre A est donc au moins égale à x dizaines et plus petite que $x+1$ dizaines; elle contient donc x dizaines.

Une fois qu'on aura le nombre des dizaines de la racine, on obtiendra le chiffre des unités en retranchant de A le cube du nombre formé par les dizaines de la racine; cela se fait en retranchant le cube de x du nombre des milles de A, et abaissant à droite de cette différence les trois derniers chiffres de A. Le premier reste ainsi obtenu, B, contient encore trois fois le carré des dizaines par le chiffre des unités, plus trois fois les dizaines par le carré du chiffre des

unités, plus le cube des unités et le reste de l'opération; si donc on divise le nombre des centaines de B par le triple carré du nombre des dizaines de la racine, on aura le chiffre des unités ou un chiffre trop fort. Pour essayer ce chiffre, on le met à droite du nombre des dizaines trouvées à la racine, on élève le nombre ainsi formé au cube et on retranche le résultat de A; si cette soustraction est possible, le nombre obtenu est bon; sinon, on diminue le chiffre des unités de un et on recommence l'essai; on agit ainsi jusqu'à ce que l'essai réussisse. — On peut simplifier les essais, en remarquant que l'on a déjà retranché de A le cube du nombre des dizaines, et qu'il suffit de soustraire du reste obtenu, B, le triple carré des dizaines par le chiffre des unités, puis le triple des dizaines par le carré des unités et enfin le cube des unités, c'est-à-dire, avec les notations antérieures (*), de retrancher de B le nombre $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ou $b(3a^2 + 3ab + b^2)$. On forme alors trois fois le carré des dizaines, trois fois le produit des dizaines par le chiffre à essayer, puis le carré de ce chiffre; on fait la somme de ces trois nombres, on la multiplie par le chiffre à essayer, et on retranche le produit de B, si cela se peut; sinon, on diminue le chiffre à essayer d'une unité et on recommence l'essai de la même façon.

Exemple. — *Extraire la racine cubique à une unité près de* 82671.

On dispose l'opération d'une manière analogue à celle employée pour la division : on met le nombre donné à la place du dividende, la racine à la place du diviseur, les calculs auxiliaires à la place du quotient et au-dessous; enfin les soustractions indiquées

Nombre	82.671	43 *Racine*
	64	4800
	18671	360
	15507	9
Reste	3164	5169
		3

(*) Dans ces notations, a représente des dizaines et b des unités ; par conséquent $3a^2$ représente des centaines, $3ab$ des dizaines, et b^2 des unités.

dans les diverses parties de l'opération, au-dessous du nombre donné. Cela fait, on sépare sur la gauche du nombre, le nombre des milles, 82; le plus grand cube contenu dans ce nombre est 64, dont la racine cubique est 4; donc le nombre des dizaines de la racine cherchée est 4. Le cube de 4 dizaines ou 40 est 64000; en retranchant ce nombre de 82671, on a pour reste 18671, qui contient trois fois le carré des dizaines par le chiffre des unités, trois fois les dizaines par le carré des unités, le cube des unités et le reste de l'opération; donc en divisant ce nombre par le triple carré des dizaines, c'est-à-dire par 48 centaines ou 4800, on aura le chiffre des unités ou un chiffre trop fort : il suffit de diviser les 186 centaines du premier reste obtenu par 48; on a ainsi 3, qui est le chiffre des unités ou un chiffre trop fort. Reste à essayer ce chiffre, c'est-à-dire à constater que le cube de 43 est contenu dans le nombre donné; cela peut se faire en élevant 43 au cube et en retranchant le résultat du nombre proposé; mais comme on a déjà retranché le cube de 4 dizaines de ce nombre, il suffit de retrancher du premier reste obtenu, 18671, le nombre

$$3 \times \overline{40}^2 \times 3 + 3 \times 40 \times 3^2 + 3^3,$$

ou

$$3(3 \times \overline{40}^2 + 3 \times 40 \times 3 + 3^2);$$

le nombre qui se trouve entre parenthèses est

$$4800 + 360 + 9 \qquad \text{ou} \qquad 5169,$$

le produit de ce nombre par 3 est 15507; ce nombre peut se soustraire de 18671 et le reste ainsi obtenu est 3164; donc le chiffre essayé est bon. La racine est 43 et le reste est 3164.

Si le nombre des milles du nombre donné est lui-même supérieur à 1000, le nombre des dizaines de la racine est lui-même supérieur à 10 et s'obtient par plusieurs opérations

successives. On le regarde comme composé de dizaines et d'unités, et, comme il est la racine cubique à une unité près du nombre des milles de A, A_1, on est ramené à trouver les dizaines de la racine cubique de A_1 à une unité près, c'est-à-dire la racine cubique, à une unité près, du nombre des milles de A_1. On décompose au besoin cette nouvelle portion de la racine en dizaines et en unités, et on continue ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à considérer un nombre de trois chiffres au plus, dont la racine cubique s'obtient immédiatement.

Le procédé revient donc, en définitive, à négliger sur la droite du nombre donné une tranche de trois chiffres, puis une seconde, puis une troisième, etc., jusqu'à ce que la portion gardée représente un nombre inférieur à 1000. La racine cubique à une unité près de cette portion donne le premier chiffre de la racine. On envisage alors le nombre formé par la partie que l'on a ainsi séparée sur la gauche du nombre, suivie de la tranche de trois chiffres qui se trouve immédiatement à droite ; le second chiffre de la racine représente les unités de la racine cubique à une unité près de ce nouveau nombre, et le chiffre que l'on vient de trouver en représente les dizaines. On retranche donc le cube de ce chiffre de la dernière tranche à gauche et on ajoute, à droite de la différence obtenue, la tranche de trois chiffres qui vient immédiatement après ; on a ainsi le premier reste partiel. On divise, comme précédemment, ce premier reste par le triple carré du chiffre trouvé en premier lieu et regardé comme désignant des dizaines ; cette division se fait en divisant les centaines du reste partiel par le triple carré du premier chiffre de la racine. On trouve ainsi le second chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. On essaie ce chiffre comme dans le cas précédent, en formant le triple carré des dizaines, le triple produit des dizaines par le chiffre à essayer, le carré de ce chiffre, et multipliant la somme de ces trois nombres par le chiffre

à essayer ; si le produit peut se soustraire du premier reste, le chiffre obtenu est bon; sinon il est trop fort, et on le diminue d'une unité, puis on recommence l'essai. Lorsqu'on arrive à une soustraction possible, on abaisse à droite de la différence une nouvelle tranche de trois chiffres, celle qui vient immédiatement après la tranche précédemment abaissée, et on a le second reste partiel. La portion trouvée à la racine représente les dizaines de la racine cubique à une unité près du nombre formé par les trois premières tranches du nombre donné A(*). On aura donc le chiffre des unités, c'est-à-dire le troisième chiffre de la racine, par un procédé complètement semblable à celui déjà employé. Seulement pour former le triple carré de la portion déjà trouvée à la racine, on pourra se servir de calculs déjà faits ; en effet on a déjà formé le nombre $3a^2 + 3ab + b^2$ (a représente des dizaines et b des unités), $a + b$ représentant la somme des dizaines et des unités de la portion déjà trouvée à la racine, il suffira d'ajouter à ce nombre $3ab + 2b^2$, pour avoir le triple carré de $a + b$; enfin, comme le nombre $a + b$ représente maintenant des dizaines, on multipliera le résultat par 100. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes les tranches primitivement négligées aient été successivement abaissées.

Exemple. — *Extraire la racine cubique à une unité près du nombre* 546739823157.

On dispose l'opération comme précédemment.

Les dizaines de la racine sont la racine cubique à une unité près du nombre 546739823; les dizaines de cette racine partielle sont la racine cubique à une unité près du nombre 546739; et enfin les dizaines de cette nouvelle racine partielle sont la racine cubique à une unité près du nombre 546.

(*) Il s'agit bien entendu des trois tranches qui sont sur la gauche du nombre.

Nombre	*Racine*		
546.739.823.157	8176		
512	19200	1968300	200246700
34739	240	17010	147060
19441	1	49	36
15298823	19441	1985359×7	200393796×6
13897513	240	17010	
1401310157	2	98	
1202362776	19683	2002467	*Calculs auxiliaires*
198947381	81	817	
	21	18	
	81	6536	
Restes partiels	162	817	
	1701	14706	

Or le plus grand cube contenu dans 546 est 512, cube de 8; donc 8 est le premier chiffre de la racine. Les deux premiers chiffres de la racine forment la racine cubique à une unité près du nombre 546739; donc on obtient le second chiffre en procédant comme dans l'exemple donné antérieurement; on retranche de 546 le cube de 8 ou 512; à droite du reste, 34, on abaisse la tranche 739, et on a le premier reste partiel, 34739, qu'on divise par le triple carré du nombre formé par les dizaines de la racine envisagée actuellement, c'est-à-dire par 19200; le quotient est 1. Pour essayer ce chiffre, on ajoute à 19200, le triple du produit des dizaines par les unités, 240, puis le carré des unités, 1, et l'on multiplie la somme, 19441 par 1; on peut retrancher ce produit du premier reste partiel; donc le chiffre 1 est bon. — A droite de la différence ainsi obtenue, on abaisse la tranche de trois chiffres qui suit celle précédemment abaissée, la tranche 823, et on a le second reste partiel, 15298823; on aura le troisième chiffre de la racine en le

regardant comme le chiffre des unités de la racine cubique du nombre 546739823 ; 81 est le nombre des dizaines de cette racine ; nous aurons donc le chiffre à essayer, en formant le triple carré de 81 et en divisant le nombre des centaines du second reste partiel, 152988, par le résultat ainsi obtenu : quant au triple carré de 81, il s'obtient en ajoutant $3 \times 80 \times 1 + 2 \times 1^2$ au nombre 19441 formé antérieurement et qui vaut déjà $3 \times \overline{80}^2 + 3 \times 80 + 1$ (tous ces calculs auxiliaires sont faits au-dessous de la racine). Le quotient de 152988 par le nombre ainsi obtenu, 19683, est 7 ; c'est le chiffre à essayer. Pour faire l'essai, on forme le nombre $3 \times \overline{81}^2 + 3 \times 81 \times 7 + 7^2$ (2e colonne de calculs auxiliaires), on multiplie ce nombre par 7 et on retranche le produit du second reste partiel ; la soustraction est possible ; donc le chiffre 7 est bon. Le 3e reste partiel s'obtient en abaissant la dernière tranche du nombre proposé ; c'est 1401310157. On divise les centaines de ce nombre par le triple carré de 817 et on a le dernier chiffre de la racine ; le triple carré de 817 est égal à 1985359 ou $(3 \times \overline{810}^2 + 3 \times 810 \times 7 + 7^2)$, augmenté de $3 \times 810 \times 7 + 2 \times 7^2$ on a ainsi (2e colonne de calculs auxiliaires) 2002467. En divisant 14013101 par 2002467 on a le chiffre à essayer, 6. L'essai de ce chiffre réussit et est indiqué dans la dernière colonne de calculs auxiliaires. La racine du nombre proposé est donc 8176 et le reste de l'opération, 198947381.

Après toutes ces explications de détail, il nous est permis maintenant de donner la règle suivante :

Règle. — *Pour extraire la racine cubique d'un nombre entier quelconque à une unité près, on dispose l'opération comme une division, le nombre donné étant mis à la place du dividende, la racine, au fur et à mesure que l'on en trouve les divers chiffres, à la place du diviseur, et les calculs auxiliaires, auxquels les essais conduisent, à la place du quotient et au-dessous ;*

les diverses soustractions que l'opération nécessite se font dans l'espace situé au-dessous du nombre donné.

On partage le nombre donné en tranches de trois chiffres à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir que deux chiffres ou un seul.

La racine cubique à une unité près du nombre formé par cette dernière tranche à gauche est le premier chiffre de la racine.

On retranche du nombre formé par cette tranche, le cube du chiffre trouvé, et à droite de la différence, on abaisse la tranche qui suit ; on a ainsi le premier reste. On divise le nombre des centaines de ce reste par le triple carré du chiffre trouvé à la racine ; si ce quotient dépasse 9, *on l'abaisse à* 9 *et on a le second chiffre de la racine ou un chiffre trop fort.*

Pour essayer ce chiffre, on pense qu'il désigne des unités, le chiffre précédent représentant des dizaines ; on forme alors une somme contenant trois fois le carré des dizaines, trois fois les dizaines par les unités, et le carré des unités ; puis on multiplie cette somme par les unités et on retranche le résultat du premier reste. Si la soustraction est possible, le chiffre trouvé est bon; sinon on le diminue d'une unité et on recommence l'essai. Dès que l'on arrive ainsi à une soustraction possible, le chiffre essayé est bon, et en abaissant à droite de la différence obtenue ainsi la troisième tranche du nombre proposé, on a le second reste.

On divise le nombre des centaines de ce reste par le triple carré du nombre déjà trouvé à la racine (nombre de deux chiffres); si le quotient surpasse 9, *on l'abaisse à* 9, *et l'on a ainsi, même dans ce cas, le troisième chiffre de la racine ou un chiffre trop fort.*

Pour essayer ce chiffre, on pense qu'il désigne des unités, la portion précédente représentant des dizaines ; on forme alors une somme contenant trois fois le carré des dizaines, trois fois le produit des dizaines par les unités et le carré des unités ; puis on multiplie cette somme par les unités et on retranche

le résultat du second reste. Si la soustraction est possible, le chiffre essayé est bon ; sinon on le diminue d'une unité et on recommence l'essai. Dès que l'on arrive ainsi à une soustraction possible, le chiffre essayé est bon, et en abaissant à droite de la différence obtenue la quatrième tranche du nombre proposé (à partir de la gauche), on a le troisième reste.

L'opération se continue ainsi par le même procédé jusqu'à ce que l'on ait abaissé successivement toutes les tranches du nombre proposé.

Pour passer du triple carré de la portion trouvée à la racine, à un moment quelconque, au triple carré de la portion obtenue avec un chiffre de plus, on remarque qu'on a déjà formé le triple carré des dizaines de ce nouveau nombre, le triple du produit des dizaines par les unités, le carré des unités, et que l'on a fait la somme de ces trois nombres ; il suffit alors d'ajouter à cette somme deux nombres connus : le triple produit des dizaines par les unités et le double du carré des unités.

Remarque. — Lorsque la portion déjà trouvée à la racine forme un nombre suffisamment grand, il y a au plus un essai à effectuer pour chacun des chiffres que l'on trouve ensuite à la somme. En effet, à un moment quelconque, le chiffre que l'on cherche est le chiffre des unités de la racine cubique à une unité près d'un nombre B, formé par un certain nombre de tranches prises sur la gauche du nombre proposé, A ; si donc on désigne par a la portion déjà trouvée à la racine et par b le chiffre des unités de la racine de B, on a $B = (10a + b)^3 + r$, r désignant le reste fourni par le nombre B. On a donc

$$B = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3 + r,$$

et, par suite, le reste partiel que l'on vient d'obtenir est $B - 1000a^3 = 300a^2b + 30ab^2 + b^3 + r$. Or on obtient le chiffre à essayer en divisant ce reste partiel par le triple carré du nombre formé par les dizaines de la racine, c'est-à-dire par $300a^2$; ce chiffre est donc la partie entière de

$\frac{300a^2b + 30ab^2 + b^3 + r}{300a^2}$ ou de $b + \frac{30ab^2 + b^3 + r}{300a^2}$; par suite, il surpasse le véritable chiffre, b, de la partie entière de $\frac{30ab^2 + b^3 + r}{300a^2}$, à condition toutefois que le résultat total ne dépasse pas 9. Mais la plus haute valeur de r est $3(10a + b)^2 + 3(10a + b)$; donc la plus haute valeur de la partie additive est

$$\frac{300a^2 + 30ab^2 + 60ab + 30a + b^3 + 3b^2 + 3b}{300a^2}$$

ou $$1 + \frac{30ab^2 + 60ab + 30a + b^3 + 3b^2 + 3b}{300a^2}.$$

Dès lors, nous obtiendrons la plus grande valeur de cette partie additive en donnant à b la plus grande valeur qu'il puisse avoir, 9; nous aurons ainsi $1 + \frac{3000a + 997}{300a^2}$ ou $1 + \frac{10}{a} + \frac{997}{300a^2}$. Dès que a atteint la valeur 11, la partie fractionnaire $\frac{10}{a} + \frac{997}{300a^2}$ est inférieure à 1, et alors le véritable chiffre est augmenté d'une unité au plus. Il en résulte donc que dès qu'on aura les deux premiers chiffres de la racine, il ne pourra y avoir qu'un seul essai infructueux.

Exemple. — Si l'on extrait la racine cubique à une unité près du nombre 2000375, on trouve 125, et chacun des deux derniers chiffres est obtenu après un essai infructueux.

143. Preuve de la racine cubique. — L'extraction de la racine cubique d'un nombre entier A est une opération qui a pour but de décomposer ce nombre en deux parties: l'une, a^3, qui est le cube d'un nombre entier; l'autre, r, qu'on nomme le reste de l'opération et qui est moindre que $3a^2 + 3a + 1$.

Dès lors, si l'on élève la racine trouvée au cube, et si l'on ajoute à ce résultat le reste trouvé aussi, on devra obtenir

le nombre donné. Lorsque cette vérification réussit, il y a de fortes présomptions pour que l'opération soit exacte; mais, si elle ne réussit pas, on ne peut rien affirmer, attendu que les erreurs qui se sont produites, ont pu se produire aussi bien lors de la vérification qu'au cours de l'opération elle-même. Dans l'exemple traité antérieurement, la vérification réussit.

On emploie aussi la méthode des restes relatifs à un module quelconque, 11 par exemple : en désignant par A', a', r' les restes des nombres A, a, r, par rapport au module 11, on a les égalités successives

$$A = \text{mult. } 11 + A',$$

$$a = \text{mult. } 11 + a',$$

$$r = \text{mult. } 11 + r',$$

et

$$a^3 = \text{mult. } 11 + a'^3;$$

par conséquent l'égalité $A = a^3 + r$ se change en

$$\text{mult. } 11 + A' = \text{mult. } 11 + a'^3 + r';$$

on voit donc que le reste de A par rapport au module 11 est le même que celui de $a'^3 + r'$. Ce raisonnement s'applique d'ailleurs à un module quelconque. On prend donc les restes de la racine et du reste de l'opération, par rapport à un module quelconque, 11 par exemple, on élève le premier au cube et on lui ajoute le second; le reste fourni par ce nombre, par rapport au module 11, doit être le même que celui fourni par le nombre donné.

Dans l'exemple traité antérieurement, le nombre proposé fournit, par rapport au module 11, le reste 0; la racine donne 3, dont le cube 27 conduit au reste 5; enfin le reste de l'opération donne 6. Or $6 + 5 = 11$; donc la vérification réussit.

144. Racine cubique à une unité près d'un nombre fractionnaire ou décimal, quelconque. — On appelle *racine cu-*

bique à une unité près d'un nombre fractionnaire ou décimal quelconque, A, la racine cubique du plus grand cube entier contenu dans le nombre proposé (n° 141).

Il est facile de voir que *la racine cubique à une unité près de* A *est la même que celle de sa partie entière*, B; en effet, on a $A = B + f$, f désignant un nombre fractionnaire plus petit que 1; d'autre part, si a désigne la racine cubique à une unité près de B, on a

$$a^3 \leqslant B < (a+1)^3;$$

donc a^3 est plus petit que $B+f$ ou A; en outre, $(a+1)^3$ étant supérieur à B, est au moins égal à $B+1$ et, par suite, supérieur à $B+f$ ou A. On a donc finalement la double inégalité

$$a^3 < A < (a+1)^3,$$

qui montre que a est la racine cubique de A à une unité près.

Le reste de l'opération est $A - a^3$.

Exemples. — La racine cubique à une unité près du nombre 82671,46 est 43 et le reste est 3164,46. — La racine cubique à une unité près du nombre 546739823157,5298 est 8176 et le reste est 198947381,5298.

145. Propriétés relatives à la racine cubique. — *Le nombre des chiffres contenus dans la racine cubique à une unité près d'un nombre entier quelconque est égal au nombre des tranches de trois chiffres qu'il contient, le nombre étant parcouru de droite à gauche et la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir qu'un ou deux chiffres.*

Cette propriété simple résulte évidemment de la façon dont on fait l'opération; mais elle peut aussi se démontrer directement. Soit en effet n le nombre des tranches que contient l'entier A; le nombre A est au moins égal au plus petit des nombres de n tranches, 1000^{n-1}, et il est inférieur au plus petit des nombres de $n+1$ tranches 1000^n;

on a donc

$$1000^{n-1} \leqslant A < 1000^n,$$

ou

$$10^{3(n-1)} \leqslant A < 10^{3n}.$$

Or la racine cubique de 10^{3k} est 10^k, d'après les règles de calcul des exposants ; donc la racine cubique de A est comprise entre 10^{n-1} et 10^n. Elle a donc n chiffres.

Le cube d'un nombre fractionnaire irréductible est un autre nombre fractionnaire irréductible dont les deux termes sont des cubes parfaits.

Car si $\frac{a}{b}$ désigne un nombre fractionnaire irréductible, son cube est $\frac{a^3}{b^3}$, d'après la règle de multiplication des nombres fractionnaires (n° 109). Or ce nouveau nombre est irréductible, puisque les facteurs premiers différents de a^3 et de b^3 sont les mêmes que ceux de a et b, et que ceux-ci n'ont aucun facteur commun.

Les exposants des facteurs premiers dans a^3 et b^3, sont tous divisibles par 3. Le produit de ces deux nombres est un cube parfait. — Réciproquement, *si le produit des deux termes d'un nombre fractionnaire irréductible est un cube parfait, ce nombre fractionnaire est aussi un cube parfait.* Car, dans ce produit, tous les exposants des facteurs premiers sont des multiples de 3. Or le numérateur et le dénominateur étant premiers entre eux, contiennent des facteurs premiers différents ; il en résulte que certains des facteurs premiers du produit figurent avec leurs exposants dans le numérateur, et les autres, avec leurs exposants aussi, dans le dénominateur. Les deux termes du nombre fractionnaire sont donc des cubes parfaits.

Il résulte de là que :

Si un nombre entier n'est pas un cube parfait, il n'est le cube d'aucun nombre fractionnaire. Si les deux termes d'un nombre fractionnaire irréductible ne sont pas des cubes parfaits, le

nombre lui-même n'est le cube d'aucun nombre entier ou fractionnaire.

Il n'y a qu'à supposer réalisées les hypothèses rejetées dans ces deux énoncés, pour s'apercevoir de leur inexactitude.

Si l'on donne un nombre fractionnaire quelconque $\frac{a}{b}$, *irréductible ou non*, on verra de suite si c'est un cube, en le réduisant au dénominateur b^3; on aura ainsi $\frac{a}{b} = \frac{ab^2}{b^3}$, et ab^2 devra être un cube parfait. En effet, le nombre $\frac{a}{b}$, réduit à sa plus simple expression, $\frac{\alpha}{\beta}$, devra avoir pour termes deux cubes parfaits, a'^3 et b'^3; on aura donc $a = ka'^3$, $b = kb'^3$, $b^2 = k^2b'^6$ et $ab^2 = k^3a'^3b'^6$; on voit donc que ab^2 est le cube de $ka'b'^2$. D'ailleurs, si ab^2 est un cube parfait, h^3, le nombre donné, $\frac{a}{b} = \frac{ab^2}{b^3}$, est le cube de $\frac{h}{b}$. Donc, que le nombre $\frac{a}{b}$ soit ou ne soit pas réduit à sa plus simple expression, ce nombre est un cube ou non, en même temps que ab^2; et, pour reconnaître l'espèce de ce nombre, on est ramené à la recherche de la racine cubique d'un nombre entier.

146. Valeurs approchées d'une racine cubique. — On appelle *racine cubique à* $\frac{1}{10^n}$ *près* d'un nombre entier ou fractionnaire quelconque, le plus grand nombre décimal formé d'unités du n^e ordre décimal et dont le cube soit inférieur au nombre donné ou égal à ce nombre.

Si nous désignons par $\frac{x}{10^n}$ ce nombre et par A le nombre donné, nous aurons, d'après la définition précédente,

$$\left(\frac{x}{10^n}\right)^3 \leqslant A < \left(\frac{x+1}{10^n}\right)^3,$$

ou $$\frac{x^3}{10^{3n}} \leqslant A < \frac{(x+1)^3}{10^{3n}}.$$

Multiplions les trois nombres qui figurent dans ces inégalités par 10^{3n}, nous aurons les deux inégalités suivantes :

$$x^3 \leqslant A \times 10^{3n} < (x+1)^3,$$

qui expriment que x est la racine cubique à une unité près du nombre $A \times 10^{3n}$.

Donc, *pour avoir la racine cubique de* A *à* 10^n *près, on multiplie le nombre donné par* 10^{3n}, *on prend sa partie entière, et l'on extrait la racine cubique de ce nombre entier à une unité près, puis on divise cette racine par* 10^n.

Les deux nombres $\frac{x}{10^n}$ et $\frac{x+1}{10^n}$ que l'on obtient par ce procédé s'appellent les *valeurs approchées par défaut et par excès, à* $\frac{1}{10^n}$ *près*, de la racine cubique du nombre donné, A.

Si A est un nombre décimal, il suffit, pour obtenir la valeur approchée par défaut, d'avancer la virgule de $3n$ rangs vers la droite, et d'extraire la racine cubique du nombre entier ainsi formé, à la façon ordinaire, en plaçant toutefois une virgule à droite du chiffre qui termine la racine cubique du nombre donné à une unité près : la multiplication du nombre donné par 10^{3n} et la division de la racine ensuite par 10^n se trouvent ainsi faites en même temps. Si A n'est pas un nombre décimal, on peut toujours le considérer comme tel : s'il est entier, en mettant autant de zéros que l'on veut à droite de la virgule ; s'il est fractionnaire, on le développe en décimales, et on obtient ainsi autant de chiffres décimaux que l'on veut, ce qui permet d'avancer la virgule de $3n$ rangs vers la droite, et d'avoir la partie entière du produit de A par 10^{3n}.

Dans la pratique, lorsqu'on veut avoir les valeurs approchées par défaut de la racine cubique d'un nombre donné, A, on développe le nombre A en décimales, si cela est nécessaire; on poursuit ce développement aussi loin que l'on

veut, soit à l'aide de zéro, s'il est limité, soit à l'aide de la période ou par la division, s'il est illimité, et l'on extrait la racine cubique du nombre ainsi formé, à la façon ordinaire, comme si on voulait obtenir la racine cubique à une unité près, c'est-à-dire en ne considérant d'abord que les tranches de la partie entière; puis, cela fait, on met une virgule à droite du chiffre des unités de la racine, et l'on continue l'opération toujours de la même façon, en abaissant à chaque fois trois chiffres décimaux à droite du reste obtenu, de telle sorte que la partie décimale soit ainsi régulièrement parcourue de gauche à droite. Si l'on s'arrête au n^e chiffre décimal, on a la valeur approchée de la racine à $\frac{1}{10^n}$ près et par défaut.

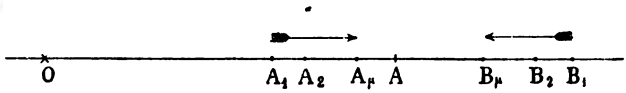
Nous sommes donc encore ici en présence d'une opération, en général illimitée, et qui donne lieu, comme le développement de $\frac{A}{B}$ en décimales, aux remarques suivantes :

1° Les valeurs approchées par défaut d'une racine cubique, à une unité près, à un dixième près, à un centième près, etc., forment une suite croissante, dont chaque terme se déduit du précédent par l'addition, sur sa droite, d'un nouveau chiffre décimal, qui peut être nul. Deux valeurs approchées par défaut et consécutives peuvent être égales. Elles seront toutes égales, à partir d'un certain rang, si le développement est limité.

2° Les valeurs approchées par excès forment une suite décroissante, dont chaque terme se déduit du précédent, en lui enlevant une unité du dernier ordre décimal qui y figure, et en lui ajoutant une unité au moins, 10 unités au plus de l'ordre décimal suivant. Deux valeurs approchées par excès et consécutives peuvent être égales. Il n'arrive pas, dans l'opération actuelle, que toutes les valeurs approchées par excès soient égales (n° 135).

3° Si l'on connaît une valeur approchée par défaut quelconque, on aura celles qui la précèdent en supprimant des chiffres décimaux sur sa droite.

4° Si l'on porte sur une droite, à partir d'un même point O et dans le même sens, vers la droite, par exemple, des lon-



gueurs OA_1, OA_2, ..., OA_μ, ..., mesurées par les valeurs approchées par défaut, et des longueurs OB_1, OB_2, ..., OB_μ, ..., mesurées par les valeurs approchées par excès, le point mobile qui décrit l'ensemble des points A_μ marche de gauche à droite, quand μ augmente, ou reste immobile, à certains moments, et celui qui décrit l'ensemble des points B_μ marche de droite à gauche, quand μ augmente ou reste immobile, à certains moments ; le premier point est toujours à gauche du second et la distance qui les sépare tombe au-dessous de toute longueur donnée à l'avance, quand μ est assez grand, car cette distance, $A_\mu B_\mu$, a pour mesure $\frac{1}{10^\mu}$. On voit donc qu'entre les deux ensembles de points, il ne peut y avoir qu'un seul point de la droite, A ; on admet que ce point existe ; on le nomme *point-limite* commun aux ensembles A_μ et B_μ, et la longueur qu'il définit nous servira plus tard à définir la racine cubique exacte du nombre donné.

Si les valeurs approchées par défaut sont toutes égales, à partir d'un certain rang, $\mu = k$, c'est le dernier des points A_μ, le point A_k, qui est le point-limite de l'ensemble des B_μ.

Dans le cas actuel, on ne connaît pas la loi de formation du nombre décimal illimité dont nous venons de parler (n° 135).

Comme exemple, nous donnons ici le calcul de la racine

cubique du nombre décimal 3,141592653589793238, à une unité près du 6e ordre décimal :

3,141592653589793238	1,464591			
2141	300	58800	6394800	14645
397592	120	2520	17520	27
29456653	16	36	16	102515
3807309589	436×4	61356×6	6412336×4	29290
591267464793	120	2520	17520	395415
12146609214238	32	72	32	
5711533216167	588	63948	642988800	
	18	146	219600	
	14	12	25	
	72	292	643208425×5	
	18	146	219600	
	252	1752	50	
	1464		64342807500	
	15		3954150	
	7320		81	
	1464		64346761731×9	
	21960		3954150	
			162	
			6435071604300	
			4393770	
			1	
			6435075998071×1	

Dans cet exemple, les calculs auxiliaires sont réduits au minimum.

Les valeurs approchées par défaut sont 1 ; 1,4 ; 1,46 ; 1,464 ; 1,4645 ; 1,46459 ; 1,464591.

Les valeurs approchées par excès sont 2 ; 1,5 ; 1,47 ; 1,465 ; 1,4646 ; 1,46460 ; 1,464592.

Deux des valeurs approchées par excès sont égales, la cinquième et la sixième.

On peut se proposer aussi de calculer les valeurs appro-

chées de la racine cubique d'un nombre A, à $\frac{p}{q}$ près, $\frac{p}{q}$ étant un nombre fractionnaire quelconque. Pour cela, il faut trouver le plus grand multiple de $\frac{p}{q}$ dont le cube soit contenu dans A ; il faut donc trouver un nombre entier x tel que l'on ait la double inégalité

$$\left(\frac{px}{q}\right)^3 \leqslant A < \left[\frac{p(x+1)}{q}\right]^3.$$

En multipliant ces trois nombres par $\frac{q^3}{p^3}$, on a la double inégalité

$$x^3 \leqslant \frac{Aq^3}{p^3} < (x+1)^3,$$

qui montre que x est la racine cubique à une unité près du nombre $\frac{Aq^3}{p^3}$. Donc

Pour avoir la racine cubique du nombre A *à* $\frac{p}{q}$ *près, on multiplie ce nombre par le cube du nombre fractionnaire renversé, on prend la partie entière du produit, on extrait la racine cubique de cette partie entière à une unité près, et on multiplie le nombre ainsi trouvé par* $\frac{p}{q}$.

EXERCICES

1° Extraire les racines cubiques des nombres 103823, 238328 et 179592582707.

R. 47, 62 et 5643.

2° Calculer, à un millième près, les racines cubiques des nombres entiers depuis 2 jusqu'à 9.

R. $\sqrt[3]{2} = 1,259$, $\sqrt[3]{3} = 1,442$,
$\sqrt[3]{4} = 1,587$, $\sqrt[3]{5} = 1,709$, $\sqrt[3]{6} = 1,817$,
$\sqrt[3]{7} = 1,912$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{9} = 2,080$.

3° Trouver un nombre tel que le carré de sa moitié, multiplié par le nombre lui-même, donne pour produit 59582.

R. 62.

4° Le cube d'un nombre et celui de son dernier chiffre sont terminés par le même chiffre. Trouver les chiffres qui terminent les cubes. Peut-on en conclure qu'un nombre donné n'est pas un cube ?

5° Démontrer que les cubes parfaits sont de la forme $9n \pm 1$ ou $9n$.

6° Si un nombre est premier, son cube surpasse le nombre lui-même d'un multiple de 24.

7° Trouver deux nombres consécutifs connaissant la différence de leurs cubes. Appliquer la méthode au cas où la différence des cubes est 611557.

R. 451 et 452.

8° Trouver deux nombres différant de $2k$ unités et dont la différence des cubes est donnée. Appliquer la méthode au cas de $k = 3$, la différence entre les cubes des deux nombres étant 5004.

R. 7 et 13.

9° Trouver trois nombres consécutifs connaissant leur produit. *Ex.* : le produit donné est 2730.

R. 13, 14 et 15.

10° Trouver trois nombres différant chacun du précédent de deux unités et dont le produit soit donné. *Ex.* : le produit donné est 1287.

R. 9, 11 et 13.

11° Si p désigne un nombre impair plus grand que 63, il y a toujours un cube parfait dans la seconde moitié de l'ensemble

$$1, 2, 3, \ldots\ldots, p-1.$$

12° Trouver un nombre connaissant le produit de son carré par le nombre lui-même augmenté de 3. *Ex.* : le produit donné est 1694.

R. 11.

13° Trouver combien il y a de cubes parfaits compris entre deux nombres donnés.

14° Établir les deux égalités

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

et

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

15° On connaît la somme de deux nombres et la somme de leurs cubes ; trouver leur produit. Trouver les deux nombres. *Ex.* : la somme des deux nombres est 109, la somme de leurs cubes est 342151.

R. 47 et 62.

16° On connaît le produit du carré d'un nombre par le cube d'un autre nombre, et le produit du cube du premier nombre par le carré du second ; les deux nombres sont premiers entre eux. Trouver ces nombres.

17° On connaît le produit d'un nombre par le carré du second et le produit du second par le carré du premier. Trouver ces nombres.

18° Condition nécessaire et suffisante pour que la fraction $\frac{a}{b}$ soit sa racine cubique à $\frac{1}{b}$ près.

19° La différence entre le cube d'un nombre premier et ce nombre ne contient aucun facteur premier supérieur à ce nombre.

CHAPITRE III

NOMBRES INCOMMENSURABLES OU IRRATIONNELS (*)

147. Définition des nombres incommensurables ou irrationnels. — Lorsque, dans la division des nombres entiers, nous nous sommes trouvé en face d'une opération généralement impossible, la nécessité de créer un nouveau symbole numérique pour représenter un quotient exact s'est imposée à notre esprit. La théorie de la mesure des longueurs nous a fourni immédiatement ce nouveau symbole, — que nous avons appelé un *nombre fractionnaire*, — et cette même théorie nous a indiqué les principales propriétés des nouveaux nombres.

Actuellement, nous venons de traiter deux opérations, en général impossibles aussi, quand on se borne à l'emploi des nombres entiers ou fractionnaires : la racine carrée et la racine cubique. Nous avons vu que, dans la plupart des cas, il n'y a pas de *nombre rationnel* (nombre entier ou fractionnaire) qui, élevé au carré, ou au cube, reproduise un nombre rationnel donné, A. Nous n'avons donc pu définir ni la racine carrée exacte, ni la racine cubique exacte, et nous nous sommes borné à étudier des opérations approchées, définies, d'ailleurs, d'une manière uniforme.

La théorie de la mesure des longueurs va nous permettre

(*) Le lecteur désireux de posséder complètement le mécanisme nouveau, fera bien de compléter la lecture de ce chapitre et du chapitre complémentaire, par la lecture des quarante premières pages de l'excellent ouvrage de M. J. Tannery « *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.* »

encore de lever cette difficulté : elle va nous procurer de nouveaux symboles numériques qui nous donneront, quand cela sera nécessaire, la racine carrée ou cubique exacte d'un nombre rationnel, et même, comme nous le verrons dans la suite, la racine carrée ou cubique exacte de l'un quelconque des nouveaux nombres, et des racines d'ordres plus élevés. La même théorie nous conduira aussi aux principales règles de calcul concernant les nouveaux symboles.

Supposons donc, comme cela a été fait antérieurement, que nous ayons choisi une certaine longueur, U, pour unité (n° 102), et que nous voulions mesurer une longueur *incommensurable* avec l'unité, c'est-à-dire ne contenant aucune partie aliquote de l'unité un nombre exact de fois. De pareilles longueurs existent : la géométrie nous apprend que la diagonale du carré construit sur l'unité de longueur est dans ce cas ; d'ailleurs la suite des développements que nous abordons maintenant, va nous conduire à former de telles longueurs, sans qu'il soit nécessaire de rien emprunter à la géométrie, en dehors de l'idée même de longueur. — Une pareille longueur n'est pas mesurable, à l'aide des nombres employés jusqu'ici.

Soit A une longueur incommensurable avec l'unité, U ; divisons l'unité en n parties égales, n étant un nombre entier quelconque, et formons les multiples de cette partie aliquote de l'unité, $\frac{U}{n}$; par hypothèse, aucun d'eux n'est égal à A, mais ils finissent par dépasser A et cette longueur est comprise entre deux d'entre eux, consécutifs, à condition toutefois de regarder une longueur nulle comme étant un multiple de quelque longueur que ce soit (*) ; ces deux multiples ont pour mesures $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, m pou-

(*) Cette idée, relative à la longueur nulle, correspond exactement à cette idée arithmétique que 0 est multiple de tout nombre.

vant être nul. Les deux nombres ainsi obtenus, $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, s'appellent les *mesures approchées de* A, *par défaut et par excès*, *à* $\frac{1}{n}$ *près*. Il est clair d'ailleurs que le nombre m ne peut être toujours nul, et qu'il croît même indéfiniment avec n, sans quoi le nombre $\frac{m+1}{n}$ finirait par être moindre qu'un nombre quelconque et la longueur que ce nombre mesure, au-dessous d'une longueur quelconque; mais cette conséquence est absurde, puisque la longueur mesurée par le nombre $\frac{m+1}{n}$ est supérieure à A.

Choisissons maintenant d'une manière quelconque une suite infinie de nombres entiers quelconques et croissants,

$$n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots, n_\mu, \ldots\ldots,$$

et considérons, pour chacun d'eux, l'une des mesures approchées de A à $\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \ldots\ldots, \frac{1}{n_\mu}, \ldots\ldots$, près. Appelons

$$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_\mu, \ldots\ldots$$

les longueurs mesurées par les nombres considérés.

Cette suite infinie de longueurs,

$$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_\mu, \ldots\ldots$$

jouit des deux propriétés suivantes :

1° Quelle que soit la longueur L_ε (ayant pour mesure le nombre rationnel ε), si petite qu'elle soit, il y a toujours un nombre entier, p, tel que, pour toutes les valeurs de μ supérieures à p, on ait constamment

$$|A_\mu - A| < L_\varepsilon. \quad (*)$$

(*) On appelle *différence* entre deux longueurs distinctes, la longueur qu'il faut ajouter à la plus petite pour avoir la plus grande. Si l'on ne sait pas laquelle de deux longueurs A et A_μ est la plus grande, on représente cette différence par $|A_\mu - A|$ ou $|A - A_\mu|$ et cette écriture symbolique se lit « *valeur absolue de* A_μ *moins* A » ou « *valeur absolue de* A *moins* A_μ ». Ceux qui ont lu les chapitres complémentaires de cet ouvrage comprendront sans peine la raison de cette désignation.

En effet, quel que soit l'entier p, on a toujours, pour les valeurs de μ supérieures à p, $\frac{1}{n_\mu} < \frac{1}{n_p}$ et $L_\mu < L_p$, en appelant L_μ et L_p les longueurs ayant pour mesures $\frac{1}{n_\mu}$ et $\frac{1}{n_p}$. D'ailleurs, d'après la manière même dont on a obtenu A_μ, on a $|A_\mu - A| < L_\mu$ et, *a fortiori*, $|A_\mu - A| < L_p$; or, on peut prendre p assez grand pour que L_p soit moindre que L_ε : il suffit que leurs mesures vérifient l'inégalité $\frac{1}{n_p} < \varepsilon$, ou $\frac{1}{\varepsilon} < n_p$; et ceci est sûrement réalisé, pour un certain indice, p, puisque les nombres n_μ finissent par dépasser tout nombre donné. On a donc, dès que l'indice μ atteint et dépasse le nombre p,

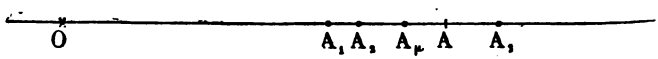
$$|A_\mu - A| < L_\mu < L_p < L_\varepsilon.$$

On exprime cette propriété qu'ont les longueurs A_μ de différer aussi peu que l'on veut de la longueur A, quand μ est assez grand, en disant que la suite

$$A_1,\ A_2,\ \ldots\ldots,\ A_\mu,\ \ldots\ldots$$

a pour *limite* la longueur A.

On modifie à peine cette conception, en portant sur une même droite, dans le même sens, et à partir d'un certain point O, les longueurs A et A_μ. Les extrémités des longueurs A_μ finissent par être aussi voisines que l'on veut de



l'extrémité, A, de la longueur OA, et le point A s'appelle le *point-limite* de l'ensemble des points A_1, A_2, ..., A_μ, ...

2° Il y a toujours un entier, p, tel que, pour toutes les valeurs de μ et μ' supérieures à p, on ait toujours

$$|A_{\mu'} - A_\mu| < L_\varepsilon,$$

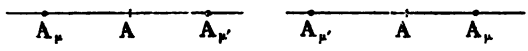
L_ε étant, comme précédemment, une longueur commensu-

rable avec l'unité, arbitrairement choisie, aussi petite que l'on veut.

Cela résulte de ce qui précède. Soit, en effet, p l'entier tel que, pour $\mu > p$, $\mu' > p$, on ait simultanément

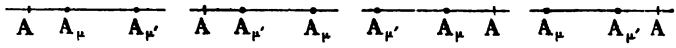
$$|A_{\mu'} - A| < \frac{1}{2} L_\varepsilon \qquad \text{et} \qquad |A - A_\mu| < \frac{1}{2} L_\varepsilon,$$

on aura nécessairement $|A_{\mu'} - A_\mu| < L_\varepsilon$; car si le point A est compris entre les points A_μ et $A_{\mu'}$,



on a $$|A_{\mu'} - A_\mu| = |A_{\mu'} - A| + |A - A_\mu|,$$

et si le point A n'est pas compris entre les points A_μ et $A_{\mu'}$,



on a toujours

$$|A_{\mu'} - A_\mu| = |A_{\mu'} - A| - |A - A_\mu|$$

ou $$|A_{\mu'} - A_\mu| = |A - A_\mu| - |A_{\mu'} - A|.$$

Par conséquent, on a toujours

$$|A_{\mu'} - A_\mu| \leqslant |A_{\mu'} - A| + |A - A_\mu|.$$

Or chacune des deux longueurs indiquées dans le second membre est inférieure à la moitié de L_ε, si μ et μ' surpassent le nombre p déterminé comme il a été dit antérieurement; donc, dans les mêmes conditions, la longueur indiquée dans le premier membre est inférieure à L_ε.

On exprime cette propriété qu'ont les longueurs de la suite $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_\mu, \ldots\ldots$ de différer les unes des autres, aussi peu que l'on veut, quand les indices sont assez grands, en disant que la suite des longueurs A_μ est *convergente*.

Désignons la suite des nombres qui mesurent les longueurs A_μ par

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\mu, \ldots\ldots$$

Cette nouvelle suite jouit de la seconde propriété : elle est *convergente*, car l'inégalité

$$|A_{\mu'} - A_\mu| < L_\varepsilon$$

se traduit arithmétiquement par

$$|a_{\mu'} - a_\mu| < \varepsilon,$$

et cette nouvelle inégalité a lieu dans les mêmes conditions que la première.

Mais rien ne nous permet d'affirmer que la nouvelle suite jouit de la première propriété, car nous ne connaissons actuellement aucun nombre que l'on puisse attacher à la longueur A et qui puisse servir de limite à cette suite.

— Nous allons montrer maintenant que, réciproquement, toute suite infinie et convergente de nombres rationnels, conduit nécessairement à l'idée de limite.

Considérons, en effet, une pareille suite

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\mu, \ldots\ldots,$$

et considérons, en même temps, les longueurs qui ont ces nombres pour mesures,

$$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_\mu, \ldots\ldots;$$

portons toutes ces longueurs sur une même droite, dans le même sens et à partir d'un même point, O. Nous allons faire voir que, à mesure que le rang grandit, on peut enfermer les extrémités de ces longueurs dans des intervalles de plus en plus restreints et se contenant mutuellement.

A cet effet, nous choisissons une suite infinie quelconque de nombres rationnels, décroissants et tombant au-dessous de tout nombre, quand leur rang est assez éloigné,

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_\mu, \ldots\ldots,$$

et nous désignons par

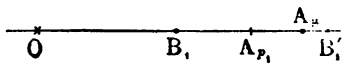
$$E_1, E_2, \ldots\ldots, E_\mu, \ldots\ldots,$$

les longueurs indéfiniment décroissantes que ces nombres mesurent.

La suite donnée étant convergente, il y a toujours un entier p_1, tel que, pour les valeurs de μ et μ' supérieures à p_1, on ait toujours

$$|a_{\mu'} - a_\mu| < \varepsilon_1, \qquad \text{et, par suite,} \qquad |A_{\mu'} - A_\mu| < E_1.$$

Nous choisirons p_1 de façon que ces deux inégalités aient lieu à partir de p_1 même, et nous pourrons alors donner à l'un des indices la valeur p_1, de sorte que l'inégalité, plus particulière, $|A_\mu - A_{p_1}| < E_1$, ait lieu pour toutes les valeurs de μ, qui viennent après p_1. — Dès lors, toutes les



longueurs A_μ qui suivent A_{p_1}, sont comprises entre les deux longueurs $OB_1 = A_{p_1} - E_1$ et $OB'_1 = A_{p_1} + E_1$, et les points A_μ tombent tous, à partir de $\mu = p_1$, entre les deux points B_1 et B'_1, dans l'intervalle $B_1B'_1$, d'une longueur totale égale à $2E_1$.

Il y a de même un entier p_2, tel que pour tous les indices μ et μ', égaux ou supérieurs à p_2, on ait

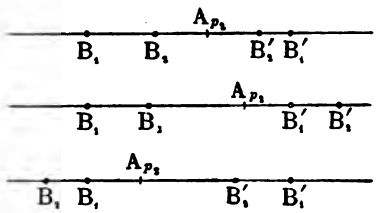
$$|a_{\mu'} - a_\mu| < \varepsilon_2, \qquad \text{et, par suite,} \qquad |A_{\mu'} - A_\mu| < E_2,$$

ou, en particulier, $|A_\mu - A_{p_2}| < E_2$.

Dès lors, les extrémités des longueurs A_μ qui suivent A_{p_2}, tombent toutes entre les extrémités des deux longueurs $OB_2 = A_{p_2} - E_2$, $OB'_2 = A_{p_2} + E_2$. Il nous reste à placer maintenant le nouvel intervalle, $B_2B'_2$, par rapport au premier, $B_1B'_1$. Pour cela nous remarquons d'abord que p_2 n'est pas plus petit que p_1; car, dès que l'on a $a_{\mu'} - a_\mu| < \varepsilon_2$, on a aussi $|a_{\mu'} - a_\mu| < \varepsilon_1$, puisque ε_1 est plus grand que ε_2; donc, à partir de l'indice p_2, on a $|a_{\mu'} - a_\mu| < \varepsilon_1$; mais cette inégalité peut avoir lieu avant, et si l'on avait pris $p_1 > p_2$, c'est que le nombre p_1 eût été mal choisi (*). Par conséquent, la longueur A_{p_2} ne vient

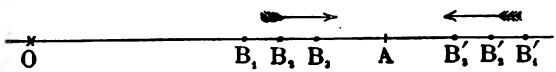
(*) Le nombre p_1 indique en effet le plus petit indice à partir duquel l'inégalité $|a_{\mu'} - a_\mu| < \varepsilon_1$ a lieu.

pas avant A_{p_1} et elle tombe dans l'intervalle $B_1B'_1$. Deux cas peuvent alors se présenter : ou bien, en portant à partir du point A_{p_2} deux longueurs égales à E_2, les deux points obtenus B_2 et B'_2, tombent entre B_1 et B'_1, ou bien l'un d'eux tombe en dehors de cet intervalle ; si cette dernière hypothèse se réalise, on peut supprimer la portion du nouvel intervalle qui est extérieure à l'ancien, soit $B'_1B'_2$ soit B_1B_2, car les longueurs qui suivent A_{p_2}, suivent A_{p_1}, et ne peuvent tomber en dehors de l'intervalle $B_1B'_1$.



On voit donc que dans les deux cas on a formé un nouvel intervalle, tout entier contenu dans le premier, d'étendue inférieure ou égale à $2E_2$, et à l'intérieur duquel tombent toutes les extrémités des longueurs qui suivent A_{p_2}. Nous continuerons à désigner les extrémités de cet intervalle par $B_2B'_2$. Et ainsi de suite.

Les extrémités les plus rapprochées de O, B_1, B_2, B_3,..... sont toutes à gauche des points B'_1, B'_2, B'_3,..... et se dé-



placent de gauche à droite, ou restent stationnaires; les extrémités les plus éloignées, B'_1, B'_2, B'_3,..... sont toutes à droite des points B_1, B_2, B_3,..... et se déplacent de droite à gauche, ou restent stationnaires. Entre ces deux groupes de points, il ne peut pas y avoir deux points différents de la droite, A et A', sans quoi la longueur $B_\mu B'_\mu$ serait supérieure en étendue à une longueur fixe AA', tandis qu'elle ne dépasse pas $2E_\mu$, longueur qui tombe au-dessous de toute longueur donnée, quand μ grandit indéfiniment.

On admet qu'entre ces deux ensembles il y a un point A(*), et ce point se nomme le *point-limite* commun aux trois ensembles B_1, B_2, ... B_μ, ... B'_1, B'_2, ... B'_μ, ..., et A_1, A_2,...., A_μ,..... La longueur OA s'appelle la *longueur-limite* des longueurs OA_μ; elle est aussi la limite des longueurs OB_μ ou OB'_μ.

La suite dont nous sommes parti est une suite infinie, rationnelle et convergente quelconque, et, par suite, elle peut parfaitement nous conduire à une longueur commensurable avec l'unité, OA. Dans ce cas, le nombre a, qui la mesure, est la limite des nombres a_μ, d'après la définition de la limite qui a été donnée antérieurement (**); car on a $|A_\mu - A| < 2E_k$, dès que μ surpasse p_k, d'où $|a_\mu - a| < 2\varepsilon_k$, dans les mêmes conditions; et le nombre $2\varepsilon_k$ est aussi petit que l'on veut.

On peut, du reste, opérer sur une longueur commensurable avec l'unité, OA, comme nous avons opéré sur les longueurs incommensurables, en prenant ses mesures approchées à $\frac{1}{n_1}$, $\frac{1}{n_2}$, ..., $\frac{1}{n_\mu}$, ... près, les nombres entiers n_1, n_2, ..., n_μ, ..., croissant indéfiniment. On formera ainsi des suites de longueurs ayant pour limite la longueur OA et, comme conséquences, des suites de nombres rationnels ayant pour limite le nombre a.

Si la longueur OA est incommensurable avec l'unité, comme nous l'avons supposé au début de tout ceci, nous ne connaissons pas de nombre qui la mesure : mais il correspond à cette longueur une idée numérique bien déterminée, car elle nous fait connaître toutes les longueurs commensurables avec l'unité et plus petites ou plus grandes que OA. Nous dirons alors qu'elle définit un *nombre incom-*

(*) On ne peut pas établir rigoureusement l'existence du point-limite ; mais l'hypothèse que ce point existe n'a rien d'arbitraire : elle s'impose nécessairement à l'esprit humain.

(**) Se reporter aux nos 115 et 122.

mensurable, *a*, qui partage tous les nombres rationnels en deux ensembles : l'un contenant le nombre 0 et les nombres qui mesurent les longueurs plus petites que OA ; l'autre, contenant les nombres qui mesurent les longueurs plus grandes que OA. Nous regarderons ce nombre comme étant attaché à la longueur OA, comme *mesurant* la longueur OA. Nous appellerons encore de pareils nombres des *nombres irrationnels*.

De cette façon, nous aurons un symbole numérique que nous ne pourrons pas représenter à la façon habituelle, par chiffres, mais qui pourra toujours être comparé aux autres nombres, en se rappelant qu'il mesure une longueur donnée, OA.

148. Nombres égaux, inégaux; divers modes de représentation. — Inverse d'un nombre. — Nous dirons que deux nombres sont *égaux* ou *inégaux*, suivant qu'ils mesurent des longueurs égales ou inégales, et nous classerons les nombres dans le même ordre que les longueurs qu'ils mesurent.

Nous pourrons alors évaluer, à l'aide de nombres rationnels, un nombre irrationnel donné, avec autant d'approximation que nous voudrons, et assigner des limites supérieures à la différence (*) entre deux nombres quelconques. Alors nous pourrons dire, par une extension toute indiquée de l'idée de limite, qu'un nombre irrationnel, *a*, est la limite de la suite infinie, rationnelle et convergente qui le définit.

Au point de vue du calcul, il est avantageux de débarrasser autant que possible chaque nombre de l'idée de longueur et de ramener tous les calculs à effectuer sur les nouveaux nombres à des calculs ordinaires. Nous parvien-

(*) Nous appellerons évidemment *somme* ou *différence* de deux nombres, le nombre qui mesure la somme ou la différence des longueurs mesurées par ces nombres.

drons sans peine à ce résultat, en définissant un nombre irrationnel, a, mesure d'une certaine longueur A, comme la limite d'une suite infinie, rationnelle et convergente

$$a_1, \quad a_2 \ldots\ldots, \quad a_\mu, \ldots\ldots,$$

de nombres qui mesurent un certain système de longueurs ayant pour limite A.

Les nombres rationnels peuvent aussi être obtenus comme limites de pareilles suites : le nouveau mode de représentation des nombres n'exclut donc aucun des nombres antérieurement connus.

Tout nombre, rationnel ou irrationnel, est susceptible d'être représenté par une infinité de suites du genre de celles que nous avons rencontrées : car il y a une infinité de manières de choisir une suite infinie et croissante de nombres entiers n_1, n_2, ..., n_μ, ..., et, par suite, de former des suites convergentes de mesures approchées d'une longueur donnée, A; et même, avec une suite déterminée de nombres entiers croissants, n_μ, on peut former une infinité de suites de mesures approchées, en variant la loi suivant laquelle l'une d'elles contient, pour certains indices, des valeurs approchées par défaut, pour d'autres, des valeurs approchées par excès.

En particulier, on pourra prendre des *valeurs* approchées à $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots\ldots, \frac{1}{10^\mu}, \ldots\ldots,$ près. Ces valeurs approchées jouissent encore ici des propriétés signalées, à propos des développements décimaux que nous avons déjà rencontrés.

1° On passe d'une valeur approchée par défaut à une valeur approchée par excès, en augmentant la première d'une unité de l'ordre décimal de son dernier chiffre. Ceci résulte de la définition même des valeurs approchées par défaut et par excès $\left(\frac{\alpha_\mu}{10^\mu} \text{ et } \frac{\alpha_\mu + 1}{10^\mu}\right)$.

2° Les valeurs approchées par défaut forment une suite

croissante (dont les termes ne vont jamais en diminuant). Les valeurs approchées par excès forment une suite décroissante (dont les termes ne vont jamais en augmentant).

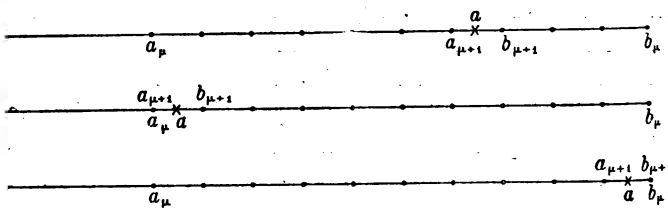
Car soient $\frac{\alpha_\mu}{10^\mu}$ et $\frac{\alpha_\mu + 1}{10^\mu}$ les deux valeurs approchées à $\frac{1}{10^\mu}$ près; elles sont reliées au nombre a par la double inégalité

$$\frac{\alpha_\mu}{10^\mu} \leqslant a < \frac{\alpha_\mu + 1}{10^\mu};$$

or cette double inégalité peut s'écrire

$$\frac{10\alpha_\mu}{10^{\mu+1}} \leqslant a < \frac{10(\alpha_\mu + 1)}{10^{\mu+1}},$$

en multipliant par 10, haut et bas, chacun des deux nombres



fractionnaires qui y figurent. D'ailleurs les valeurs approchées à $\frac{1}{10^{\mu+1}}$ près sont des multiples consécutifs de $\frac{1}{10^{\mu+1}}$, et comprennent le nombre a : ils sont donc compris entre les deux multiples précédents, l'un d'eux pouvant être égal à un de ces nombres.

Dans les figures explicatives placées plus haut, on a marqué les onze multiples de $\frac{1}{10^{\mu+1}}$, depuis $\frac{10\alpha_\mu}{10^{\mu+1}}$ jusqu'à $\frac{10(\alpha_\mu+1)}{10^{\mu+1}}$, et l'on a désigné les premières valeurs approchées par a_μ et b_μ, les secondes, par $a_{\mu+1}$ et $b_{\mu+1}$.

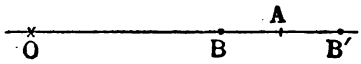
Réciproquement, étant donné un développement décimal

quelconque, limité ou illimité, il donne naissance à deux suites de valeurs approchées qui jouissent de toutes ces propriétés et qui, par suite, définissent une longueur limite OA, commensurable ou incommensurable avec l'unité (nos 122, 135, 146). Le nombre qui mesure cette longueur s'appelle la *valeur* du nombre décimal considéré.

Si deux suites infinies, rationnelles et convergentes,

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots\ a_\mu,\ \ldots\ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots,\ b_\mu,\ \ldots\ldots,$$

définissent le même nombre, les longueurs qu'elles mesurent ont la même limite, OA; par conséquent, au-delà d'un certain rang, p, les longueurs correspondantes aux nombres des deux suites tombent toutes dans un intervalle, BB′, ayant pour milieu le point A et arbitrairement choisi. En d'autres termes, ayant arbitrairement choisi le nombre rationnel ε, on peut toujours trouver un entier p, tel que pour toutes les valeurs de μ supérieures à p on ait

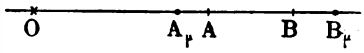


$$|b_\mu - a_\mu| < \varepsilon.$$

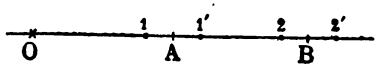
Réciproquement, si cela a lieu, les deux suites conduisent à la même longueur limite OA. Car soit A la limite de la suite des longueurs A_μ qui correspondent aux nombres de la première suite, il y a, quel que soit ε, un entier p, tel que, pour les valeurs de μ supérieures à p, on ait $|A_\mu - A| < \frac{1}{2} L_\varepsilon$, et $|B_\mu - A_\mu| < \frac{1}{2} L_\varepsilon$; on a donc, dès que μ surpasse p, $|B_\mu - A| < L_\varepsilon$; ce qui montre que la suite des longueurs B_μ a pour limite la longueur A.

On peut adjoindre au *critérium d'égalité* que nous venons de trouver, une autre règle souvent commode et presque évidente : *si l'on sait que deux nombres* a *et* b *sont toujours compris entre deux nombres variables* a_μ *et* b_μ, *et dont la*

différence tend vers 0 (*), *on peut affirmer que les deux nombres* a *et* b *sont égaux*. Car s'ils étaient distincts, les longueurs qu'ils mesurent seraient différentes, et la longueur variable, comprise entre les extrémités des longueurs OA_μ et OB_μ, qui correspondent à a_μ et b_μ, serait supérieure à la longueur AB ; elle ne pourrait donc pas tomber au-dessous de toute longueur donnée, ce qui est cependant admis.



Si deux suites infinies, rationnelles et convergentes, définissent des nombres différents, les extrémités des longueurs A_μ, qui représentent les nombres de la première suite, et celles des longueurs B_μ, qui représentent les nombres de la seconde suite, finiront par tomber dans des intervalles absolument distincts, ayant pour milieux respectifs les deux points A et B (**), et d'étendues moindres qu'une longueur choisie à l'avance, aussi petite que l'on veut. Si donc B désigne la plus grande des deux longueurs, et h la mesure d'une longueur rationnelle plus petite que AB, on aura à partir d'un certain rang $b_\mu > a_\mu + h$.



Réciproquement, si cela a lieu, il est clair que les longueurs B_μ ont une limite au moins égale à $A + L_h$ (L_h étant une longueur de mesure h), et, par suite, supérieure à A.

C'est donc à ce caractère, purement arithmétique, comme les précédents, que nous reconnaîtrons qu'un nombre b est supérieur à un nombre a.

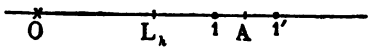
(*) On dit qu'un nombre variable tend vers 0, quand il tombe au-dessous de tout nombre donné, à un certain moment.

(**) Les notations actuelles ont les mêmes sens que précédemment.

Pour terminer ce paragraphe, nous allons définir l'*inverse* d'un nombre a.

Considérons un nombre quelconque, a, autre que 0, et défini par la suite infinie, rationnelle et convergente, $a_1, a_2, \ldots\ldots a_\mu, \ldots\ldots$, et soit A la longueur qu'il mesure.

Les longueurs qui représentent les nombres a_μ, se rapprochant de plus en plus de la longueur OA, on peut être assuré qu'au-delà d'un certain rang, il n'y a plus de longueurs nulles parmi elles, et qu'elles sont même supérieures à une certaine longueur L_h, inférieure à A, et ayant pour mesure le nombre rationnel h. Rien ne nous empêche d'ailleurs de commencer la suite à ce moment, car nous pouvons négliger au début d'une suite infinie autant de termes que nous voulons.



Cela posé, considérons la nouvelle suite

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots\ldots, \frac{1}{a_\mu}, \ldots\ldots;$$

elle aussi est convergente, car on peut écrire

$$\left|\frac{1}{a_\mu} - \frac{1}{a_{\mu'}}\right| = \frac{|a_{\mu'} - a_\mu|}{a_\mu a_{\mu'}},$$

et l'on est ainsi conduit à l'inégalité

$$\left|\frac{1}{a_\mu} - \frac{1}{a_{\mu'}}\right| < \frac{|a_{\mu'} - a_\mu|}{h^2},$$

puisque le nouveau dénominateur, h^2, est moindre que l'ancien, $a_\mu a_{\mu'}$; or, nous pouvons toujours rendre le second membre moindre qu'un nombre rationnel quelconque, ε ; il suffit de poser $|a_{\mu'} - a_\mu| < h^2\varepsilon$, inégalité certainement réalisée, dès que μ et μ' sont assez grands, puisque la suite des a_μ est convergente. La nouvelle suite est donc convergente ; par suite, elle définit un nombre, b, que l'on représente par $\frac{1}{a}$, et qu'on appelle l'*inverse* du nombre a.

Quelle que soit la suite que l'on prenne pour définir le nombre a, *on arrive toujours au même inverse.* — Car si l'on prend deux suites convergentes, définissant le nombre a,

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\mu, \ldots\ldots,$$
$$a'_1, a'_2, \ldots\ldots, a'_\mu, \ldots\ldots,$$

et si l'on suppose qu'elles ne contiennent que des nombres supérieurs à un certain nombre rationnel, h, il est aisé de montrer que les deux suites

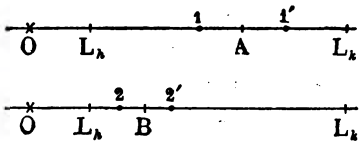
$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots\ldots, \frac{1}{a_\mu}, \ldots\ldots,$$
$$\frac{1}{a'_1}, \frac{1}{a'_2}, \ldots\ldots, \frac{1}{a'_\mu}, \ldots\ldots$$

définissent le même nombre ; en effet, la différence entre deux termes de même rang est

$$\left|\frac{1}{a_\mu} - \frac{1}{a'_\mu}\right| = \frac{|a'_\mu - a_\mu|}{a_\mu a'_\mu},$$

et ce second nombre est inférieur à $\frac{|a'_\mu - a_\mu|}{h^2}$; or, celui-ci est inférieur à un nombre quelconque, ε, dès que μ atteint et dépasse un certain entier p, puisqu'on peut toujours aller assez loin dans les deux suites données pour que la différence $|a'_\mu - a_\mu|$ soit moindre que $h^2\varepsilon$. Donc, etc.

Les inverses de deux nombres différents sont classés en sens opposé des nombres eux-mêmes.



Car, soient a et b deux nombres non nuls, et définis par les suites infinies, rationnelles et convergentes,

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\mu, \ldots\ldots,$$
$$b_1, b_2, \ldots\ldots, b_\mu, \ldots\ldots$$

Au-delà d'un certain rang, les longueurs qui représentent les nombres de ces suites ont pour extrémités des points qui tombent dans des intervalles aussi restreints que l'on veut et ayant pour milieux respectifs les points A et B ; ces longueurs sont donc alors toutes comprises entre deux longueurs commensurables avec l'unité, L_k et L_h, prises arbitrairement, l'une au-dessus de OA et OB, à la fois ; l'autre, au-dessous. Nous pouvons d'ailleurs supposer que les suites commencent à ce moment. Si, d'autre part, nous supposons $a > b$, nous aurons, à partir d'un certain rang, $a_\mu > b_\mu + l$, l étant un certain nombre rationnel, et, par suite,

$$\frac{1}{b_\mu} - \frac{1}{a_\mu} = \frac{a_\mu - b_\mu}{a_\mu b_\mu} > \frac{l}{k^2},$$

puisque $a_\mu - b_\mu > l$ et $a_\mu b_\mu < k^2$. Nous avons donc

$$\frac{1}{b_\mu} > \frac{1}{a_\mu} + \frac{l}{k^2},$$

au-delà d'un certain rang. Donc l'inverse de b est plus grand que l'inverse de a.

La mesure d'une longueur B, *lorsqu'on prend une longueur* A *pour unité, est l'inverse de la mesure de* A, B *étant prise pour unité*

Si les deux longueurs A et B sont commensurables entre elles, c'est-à-dire s'il y a une partie aliquote de A qui soit aussi partie aliquote de B, le théorème est évident : car soit C cette partie aliquote commune ; supposons-la contenue n fois dans A et p fois dans B ; le nombre $\frac{n}{p}$ est la mesure de A par rapport à l'unité B, et le nombre $\frac{p}{n}$, la mesure de B par rapport à l'unité A. Or chacun de ces nombres est l'inverse de l'autre ; le théorème est donc établi.

Supposons maintenant que A et B n'aient pas de commune mesure, et désignons par a la mesure de A par rap-

port à l'unité B, par b, la mesure de B par rapport à l'unité A. Le nombre a est compris entre deux mesures approchées quelconques de A, par rapport à B, à $\frac{1}{p}$ près, $\frac{n}{p}$ et $\frac{n+1}{p}$; le nombre $\frac{1}{a}$ est donc compris entre $\frac{p}{n+1}$ et $\frac{p}{n}$. Nous allons démontrer maintenant que le nombre b est aussi compris entre les mêmes nombres. Pour cela, rappelons que le nombre $\frac{n}{p}$ est la mesure d'une longueur A_1, moindre que A, par rapport à B ; cette longueur A_1 est commensurable avec B; par conséquent, la mesure de B par rapport à A_1 est $\frac{p}{n}$, et ce nombre exprime que B contient p fois la n^e partie de A_1, que nous appellerons C_1. Cela posé, puisque A_1 est plus petit que A, la n^e partie de A, C, est supérieure à C_1; cette longueur C est donc contenue au plus $p-1$ fois dans B, et par suite la mesure approchée par défaut à $\frac{1}{n}$ près de B, la longueur A étant prise pour unité, est au plus $\frac{p-1}{n}$; la mesure approchée par excès est donc au plus $\frac{p}{n}$, et l'on est certain que b est inférieur à $\frac{p}{n}$. On démontrerait de même que b est supérieur à $\frac{p}{n+1}$. Les deux nombres $\frac{1}{a}$ et b sont donc tous deux compris entre $\frac{p}{n+1}$ et $\frac{p}{n}$.

Mais la différence entre ces deux nombres est

$$\frac{p}{n}-\frac{p}{n+1}=\frac{p}{n(n+1)}=\frac{p}{n+1}\times\frac{1}{n};$$

le nombre $\frac{p}{n+1}$ est moindre qu'un nombre rationnel quelconque, supérieur à b ou à $\frac{1}{a}$, le nombre $\frac{1}{n}$ devient aussi petit que l'on veut, quand p et, par suite, n augmentent

indéfiniment; donc le produit $\frac{p}{n+1} \times \frac{1}{n}$ tend vers 0. — Par suite, les deux nombres $\frac{1}{a}$ et b sont égaux.

Il résulte de là que *si une longueur reste fixe, et si l'unité qui sert à la mesurer change, sa mesure varie en sens inverse de l'unité.*

Car soit A une longueur mesurée successivement à l'aide de deux unités différentes, U_1 et U_2 ; désignons par a_1 et a_2 les deux nombres qui la mesurent. Les nombres $\frac{1}{a_1}$ et $\frac{1}{a_2}$ sont les mesures de U_1 et U_2 par rapport à A. Si donc $U_2 > U_1$, on a $\frac{1}{a_2} > \frac{1}{a_1}$, et, par suite, $a_2 < a_1$. L'énoncé précédent n'est qu'une façon de traduire ce résultat.

Enfin énonçons nettement les résultats suivants, qui sont des conséquences immédiates de la définition de l'inverse :

Le nombre 0 *n'a pas d'inverse.*

Si b *est l'inverse de* a, a *est aussi l'inverse de* b.

149. Addition et soustraction des nombres rationnels ou irrationnels. — Étant donnés deux nombres rationnels ou irrationnels, a et b, mesurant deux longueurs données A et B, il est naturel d'appeler *somme* de ces nombres, le nombre qui mesure la longueur-somme de A et de B.

Nous appellerons de même *différence* de ces deux nombres, le nombre qui mesure la différence des deux longueurs A et B.

Supposons, pour fixer les idées, $a > b$, et désignons par A_μ et B_μ les longueurs qui sont mesurées par les nombres a_μ et b_μ, a_μ et b_μ étant des nombres quelconques des deux suites rationnelles

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu, \quad \ldots\ldots,$$

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots\ldots, \quad b_\mu, \quad \ldots\ldots,$$

qui définissent les nombres a et b. Les longueurs A_μ et B_μ ont pour limites respectives A et B.

Aux deux suites

$$a_1 + b_1, \quad a_2 + b_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu + b_\mu, \quad \ldots\ldots,$$
$$a_1 - b_1, \quad a_2 - b_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu - b_\mu, \quad \ldots\ldots \text{ (*)}$$

correspondent les suites de longueurs

$$A_1 + B_1, \quad A_2 + B_2, \quad \ldots\ldots, \quad A_\mu + B_\mu, \quad \ldots\ldots,$$
$$A_1 - B_1, \quad A_2 - B_2, \quad \ldots\ldots, \quad A_\mu - B_\mu, \quad \ldots\ldots,$$

qui ont respectivement pour limites $A + B$ et $A - B$.

En effet, quelle que soit la longueur L_ε, ayant pour mesure le nombre rationnel ε, il y a toujours un nombre entier p, tel que pour les valeurs de μ supérieures à p, on ait toujours

$$|A - A_\mu| < \frac{1}{2} L_\varepsilon, \qquad |B - B_\mu| < \frac{1}{2} L_\varepsilon;$$

on a donc sûrement, à partir de cet indice, (**)

$$|A + B - A_\mu - B_\mu| < L_\varepsilon \quad \text{et} \quad |A - B - A_\mu + B_\mu| < L_\varepsilon;$$

ce qui démontre que les deux dernières suites sont convergentes et ont pour limites respectives $A + B$ et $A - B$.

Donc les deux suites

$$a_1 + b_1, \quad a_2 + b_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu + b_\mu, \quad \ldots\ldots,$$
$$a_1 - b_1, \quad a_2 - b_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu - b_\mu, \quad \ldots\ldots$$

définissent les nombres $a + b$ et $a - b$, somme et différence de a et de b.

On peut démontrer directement, sans faire intervenir l'idée de longueur, que si l'on suppose les deux suites

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu, \quad \ldots\ldots,$$
$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots\ldots, \quad b_\mu, \quad \ldots\ldots$$

(*) Puisque $a > b$, on peut supposer les nombres de la première suite supérieurs à ceux de la seconde. (Voir ce qui précède.)

(**) Les deux différences $|A + B - A_\mu - B_\mu|$ et $|A - B - A_\mu + B_\mu|$ ne dépassent pas la somme $|A - A_\mu| + |B - B_\mu|$. Cela a déjà été expliqué antérieurement.

convergentes, les suites

$$a_1+b_1,\quad a_2+b_2,\quad \ldots\ldots,\quad a_\mu+b_\mu,\quad \ldots\ldots,$$
$$a_1-b_1,\quad a_2-b_2,\quad \ldots\ldots,\quad a_\mu-b_\mu,\quad \ldots\ldots$$

(en supposant a_μ toujours plus grand que b_μ) sont convergentes, et que, par suite, elles définissent deux nombres, α et β, que l'on appellera alors la somme et la différence des nombres a et b définis par les deux premières suites. Nous aurons un exemple de ce genre de raisonnement dans la multiplication.

Les deux opérations que nous venons de définir sont des *opérations uniformes*, c'est-à-dire que chacune d'elles conduit à un résultat bien déterminé.

Car si l'on considère deux suites infinies, rationnelles et convergentes, pour définir chacun des nombres a et b,

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_1, & a_2, & \ldots\ldots, & a_\mu, & \ldots\ldots, \\ a'_1, & a'_2, & \ldots\ldots, & a'_\mu, & \ldots\ldots, \end{array}\right. \quad a$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} b_1, & b_2, & \ldots\ldots, & b_\mu, & \ldots\ldots, \\ b'_1, & b'_2, & \ldots\ldots, & b'_\mu, & \ldots\ldots, \end{array}\right. \quad b$$

les suites de longueurs qu'elles mesurent ont la même limite, A ou B ; par conséquent les deux suites

$$A_1+B_1,\quad A_2+B_2,\quad \ldots\ldots,\quad A_\mu+B_\mu,\quad \ldots\ldots,$$
$$A'_1+B'_1,\quad A'_2+B'_2,\quad \ldots\ldots,\quad A'_\mu+B'_\mu,\quad \ldots\ldots$$

ont pour limite commune A + B ; les deux suites

$$a_1+b_1,\quad a_2+b_2,\quad \ldots\ldots,\quad a_\mu+b_\mu,\quad \ldots\ldots,$$
$$a'_1+b'_1,\quad a'_2+b'_2,\quad \ldots\ldots,\quad a'_\mu+b'_\mu,\quad \ldots\ldots$$

définissent donc le même nombre. Même raisonnement pour les suites relatives à la différence des deux nombres a et b.

L'addition est une opération *commutative*, c'est-à-dire que l'on a $a+b=b+a$.

En effet, les deux nombres a et b étant définis par les deux suites

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_\mu,\ \ldots\ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots,\ b_\mu,\ \ldots\ldots,$$

les deux nombres $a+b$ et $b+a$ sont définis par les suites identiques

$$a_1+b_1,\quad a_2+b_2,\quad \ldots\ldots,\quad a_\mu+b_\mu,\quad \ldots\ldots,$$
$$b_1+a_1,\quad b_2+a_2,\quad \ldots\ldots,\quad b_\mu+a_\mu,\quad \ldots\ldots;$$

donc ils sont égaux.

L'addition jouit de la propriété $a+0=a$. En effet, tout nombre rationnel, r, peut se définir par la suite

$$r,\ r,\ \ldots\ldots,\ r,\ \ldots\ldots,$$

et, en particulier 0, par la suite

$$0,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0,\ \ldots\ldots;$$

si donc le nombre a est défini par la suite

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_\mu,\ \ldots\ldots,$$

le nombre $a+0$ est défini par la suite identique

$$a_1+0,\quad a_2+0,\quad \ldots\ldots,\quad a_\mu+0,\quad \ldots\ldots$$

La soustraction jouit d'une propriété analogue $a-0=a$.

Il nous reste à définir la somme d'un nombre quelconque de nombres $a, b, \ldots\ldots, l$, rationnels ou irrationnels. Si les nombres $a, b, \ldots\ldots, l$ mesurent les longueurs A, B, ..., L, nous pouvons appeler *somme* de ces nombres, le nombre qui mesure la somme des longueurs A, B, ..., L. Nous pouvons aussi procéder de proche en proche, et appeler $a+b+c$ la somme du nombre $a+b$, que nous savons former, et de c; puis $a+b+c+d$, la somme du nombre $a+b+c$ et de d. Et ainsi de suite. Nous en concluons de suite que si les nombres $a, b, \ldots\ldots, l$ sont définis par les suites

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_\mu,\ \ldots\ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots,\ b_\mu,\ \ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l_1,\ l_2,\ \ldots\ldots,\ l_\mu,\ \ldots\ldots$$

le nombre $a+b+\cdots\cdots+l$ est défini par la suite

$$a_1+b_1+\cdots+l_1,\quad a_2+b_2+\cdots+l_2,\ldots,\quad a_\mu+b_\mu+\cdots+l_\mu,\ldots$$

Il est facile d'établir maintenant que l'addition est une *opération associative*, c'est-à-dire que pour effectuer une somme, on peut d'abord effectuer des sommes partielles, fournies par certains groupements des parties de cette somme, puis former la somme de celles-ci.

Bornons-nous à établir que $a+b+c=a+(b+c)$, $(b+c)$ désignant la somme $b+c$ effectuée. Cela résulte de ce que, si l'on désigne par

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_\mu,\ \ldots\ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots,\ b_\mu,\ \ldots\ldots,$$
$$c_1,\ c_2,\ \ldots\ldots,\ c_\mu,\ \ldots\ldots$$

les suites qui définissent les nombres a, b et c, les deux nombres $a+b+c$ et $a+(b+c)$ sont définis par les suites identiques

$$a_1+b_1+c_1,\quad a_2+b_2+c_2,\quad \ldots\ldots,\quad a_\mu+b_\mu+c_\mu,\quad \ldots\ldots,$$
$$a_1+(b_1+c_1),\quad a_2+(b_2+c_2),\quad \ldots\ldots,\quad a_\mu+(b_\mu+c_\mu),\quad \ldots\ldots$$

Lorsqu'un nombre a est plus grand qu'un nombre b, la longueur A correspondant à a est supérieure à la longueur B, qui correspond à b. Il y a une longueur, C, et une seule qui, ajoutée à B, reproduit A. Il y a donc un nombre, c, et un seul qui, ajouté à b, reproduit a. Ce nombre est l'*excès* de a sur b, *la différence* entre a et b, et l'opération qui donne le nombre c est la *soustraction*. On peut donc ainsi définir la soustraction comme opération inverse de l'addition.

150. Multiplication des nombres rationnels ou irrationnels — Considérons deux nombres quelconques, a et b, définis par les deux suites infinies, rationnelles et convergentes,

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_\mu,\ \ldots\ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots,\ b_\mu,\ \ldots\ldots:$$

nous allons montrer que la suite

$$a_1b_1,\ a_2b_2,\ \ldots\ldots,\ a_\mu b_\mu,\ \ldots\ldots$$

est aussi rationnelle et convergente.

Comme elle est évidemment rationnelle, il suffit d'établir le second point.

Pour cela, nous désignerons par α la différence entre $a_{\mu'}$ et a_μ, par β la différence entre $b_{\mu'}$ et b_μ, de telle sorte que l'on ait

$$a_{\mu'} = a_\mu + \alpha \quad \text{et} \quad b_{\mu'} = b_\mu + \beta,$$

ou $\quad a_{\mu'} = a_\mu - \alpha \quad$ et $\quad b_{\mu'} = b_\mu + \beta,$

ou $\quad a_{\mu'} = a_\mu + \alpha \quad$ et $\quad b_{\mu'} = b_\mu - \beta,$

ou $\quad a_{\mu'} = a_\mu - \alpha \quad$ et $\quad b_{\mu'} = b_\mu - \beta;$

alors la différence $|a_{\mu'}b_{\mu'} - a_\mu b_\mu|$ sera égale à

$$\alpha b_\mu + \beta a_\mu + \alpha\beta \quad \text{ou à} \quad |\alpha b_\mu + \alpha\beta - \beta a_\mu|$$

ou à $\quad |\beta a_\mu + \alpha\beta - \alpha b_\mu| \quad$ ou à $\quad |\alpha b_\mu + \beta a_\mu - \alpha\beta|.$

On aura donc toujours

$$|a_{\mu'}b_{\mu'} - a_\mu b_\mu| \leqslant \alpha b_\mu + \beta a_\mu + \alpha\beta.$$

Cela posé, désignons par γ le plus grand des deux nombres α et β, ou un nombre supérieur à α et β, et les dépassant d'ailleurs d'aussi peu que l'on veut; appelons, en outre, k, un nombre rationnel supérieur aux nombres des deux suites a_μ et b_μ. Nous aurons nécessairement

$$|a_{\mu'}b_{\mu'} - a_\mu b_\mu| \leqslant \gamma(a_\mu + b_\mu + \gamma)$$

et $\quad |a_{\mu'}b_{\mu'} - a_\mu b_\mu| < 3k\gamma;$

or on peut rendre $3k\gamma$ plus petit qu'un nombre quelconque, ε; il suffit de prendre $\gamma < \frac{\varepsilon}{3k}$. Nous voyons donc que si on prend α et β moindres que $\frac{\varepsilon}{3k}$, on a

$$|a_{\mu'}b_{\mu'} - a_\mu b_\mu| < \varepsilon;$$

d'ailleurs, comme les deux suites a_μ et b_μ sont convergentes, les deux nombres α et β sont moindres que $\frac{\varepsilon}{3k}$, dès

que μ et μ' dépassent un certain nombre entier, p; donc, à partir d'un certain rang, p, l'inégalité précédente est toujours satisfaite et la suite $a_\mu b_\mu$ est convergente.

Cette suite définit donc un certain nombre, c; nous appellerons ce nombre le *produit* de a par b et nous le représenterons par ab, de sorte que $ab = c$.

La multiplication est une opération *uniforme*, c'est-à-dire que quels que soient les modes de représentation adoptés pour deux nombres a et b, elle conduit toujours au même résultat.

Car soient

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu, \quad \ldots\ldots,$$
$$a'_1, \quad a'_2, \quad a'_3, \quad \ldots\ldots, \quad a'_\mu, \quad \ldots\ldots$$

deux suites infinies, rationnelles et convergentes, définissant le même nombre, a, et

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots\ldots, \quad b_\mu, \quad \ldots\ldots,$$
$$b'_1, \quad b'_2, \quad \ldots\ldots, \quad b'_\mu, \quad \ldots\ldots$$

deux suites de même nature définissant le même nombre b ; les deux suites

$$a_1b_1, \quad a_2b_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu b_\mu, \quad \ldots\ldots,$$
$$a'_1b'_1, \quad a'_2b'_2, \quad \ldots\ldots, \quad a'_\mu b'_\mu, \quad \ldots\ldots$$

définissent le même nombre, ou, ce qui revient au même, la différence $|a'_\mu b'_\mu - a_\mu b_\mu|$ est moindre qu'un nombre quelconque, ε, dès que μ dépasse un certain nombre entier, p. Ceci se démontre par un raisonnement complètement semblable à celui employé dans la définition du produit ab.

La multiplication est une opération *commutative*, c'est-à-dire que dans un produit de deux facteurs on peut échanger entre eux les deux facteurs, ou que l'on a $ab = ba$.

Supposons, en effet, que les deux nombres a et b soient définis par les suites convergentes et rationnelles

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu, \quad \ldots\ldots,$$
$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots\ldots, \quad b_\mu, \quad \ldots\ldots;$$

alors les deux nombres ab et ba sont définis par les deux suites identiques

$$a_1b_1, \quad a_2b_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu b_\mu, \quad \ldots\ldots,$$
$$b_1a_1, \quad b_2a_2, \quad \ldots\ldots, \quad b_\mu a_\mu, \quad \ldots\ldots;$$

donc ces deux nombres sont égaux.

La multiplication jouit des deux propriétés $A \times 1 = A$ et $A \times 0 = 0$.

En effet, les deux nombres 1 et 0 peuvent se définir, dans le mode actuel de représentation, par les suites

$$1, \ 1, \ 1, \ \ldots\ldots, \ 1 \ldots\ldots,$$
$$0, \ 0, \ 0, \ \ldots\ldots, \ 0 \ldots\ldots;$$

soit alors $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\mu, \ldots\ldots,$ la suite qui définit le nombre a ; les deux nombres $a \times 1$ et $a \times 0$ sont définis par les deux suites

$$a_1 \times 1, \quad a_2 \times 1, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu \times 1, \quad \ldots\ldots,$$
$$a_1 \times 0, \quad a_2 \times 0, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu \times 0, \quad \ldots\ldots,$$

et l'on obtient ainsi les deux nombres a et 0.

Pour définir un produit de plusieurs facteurs, on procède de proche en proche : ainsi le produit $a.\ b.\ c \ldots\ldots l$ s'obtient en multipliant d'abord a par b, puis le nombre obtenu par c, puis le nouveau résultat par d; et ainsi de suite.

Si l'on représente par

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu, \quad \ldots\ldots,$$
$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots\ldots, \quad b_\mu, \quad \ldots\ldots,$$
$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots\ldots, \quad c_\mu, \quad \ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l_1, \quad l_2, \quad \ldots\ldots, \quad l_\mu, \quad \ldots\ldots$$

les suites qui définissent les nombres, $a, b, c, \ldots\ldots, l$, le

nombre ab sera défini par la suite

$$a_1b_1, \quad a_2b_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu b_\mu, \quad \ldots\ldots;$$

le nombre abc par la suite

$$a_1b_1c_1, \quad a_2b_2c_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu b_\mu c_\mu, \quad \ldots\ldots;$$

etc., et enfin le nombre $abc\ldots l$ par la suite

$$a_1b_1c_1\ldots l_1, \quad a_2b_2c_2\ldots l_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu b_\mu c_\mu\ldots l_\mu, \quad \ldots\ldots$$

Cette suite n'est pas altérée si l'on change l'ordre des facteurs d'une façon quelconque ; elle n'est pas altérée davantage si l'on réunit certains facteurs entre eux, en effectuant leur produit. Donc :

1° *Dans un produit d'un nombre quelconque de facteurs on peut écrire les facteurs dans l'ordre que l'on veut ;*

2° *La multiplication est une opération associative.*

Enfin la multiplication est une opération *distributive par rapport à l'addition*, c'est-à-dire que le produit d'une somme par un nombre a est la somme des produits des diverses parties par a.

Bornons-nous à démontrer que l'on a

$$a(b+c) = ab + ac;$$

pour cela, désignons par

$$\begin{array}{lllll} a_1, & a_2, & \ldots\ldots, & a_\mu, & \ldots\ldots, \\ b_1, & b_2, & \ldots\ldots, & b_\mu, & \ldots\ldots, \\ c_1, & c_2, & \ldots\ldots, & c_\mu, & \ldots\ldots \end{array}$$

les suites infinies, rationnelles et convergentes qui définissent les nombres a, b, c; alors les suites

$$\begin{array}{lllll} a_1b_1, & a_2b_2, & \ldots\ldots, & a_\mu b_\mu, & \ldots\ldots, \\ a_1c_1, & a_2c_2, & \ldots\ldots, & a_\mu c_\mu, & \ldots\ldots, \\ b_1+c_1, & b_2+c_2, & \ldots\ldots, & b_\mu+c_\mu, & \ldots\ldots \end{array}$$

sont rationnelles et convergentes et définissent les nombres ab, ac, $b+c$. Les deux nombres $a(b+c)$ et $ab+ac$ sont définis par les deux suites infinies, rationnelles et con-

vergentes,

$$a_1(b_1+c_1),\quad a_2(b_2+c_2),\quad \ldots\ldots,\quad a_\mu(b_\mu+c_\mu),\quad \ldots\ldots,$$
$$a_1b_1+a_1c_1,\quad a_2b_2+a_2c_2,\quad \ldots\ldots,\quad a_\mu b_\mu+a_\mu c_\mu,\quad \ldots\ldots;$$

or ces deux suites sont identiques ; donc elles définissent des nombres égaux.

On démontrerait de même que les deux nombres $a(b+c+\cdots\cdots+l)$ et $ab+ac+\cdots\cdots+al$ sont égaux.

Lorsqu'on écrit le nombre $ab+ac+\cdots\cdots+al$ sous la forme $a(b+c+\cdots\cdots+l)$ on dit que *l'on met* a *en facteur* (*).

Telles sont les principales propriétés de la multiplication.

151. Division des nombres rationnels ou irrationnels. — Nous définirons la division comme opération inverse de la multiplication. Étant donnés deux nombres a et b, dont l'un, b, n'est pas nul, nous appellerons *quotient* de a par b un nombre c qui, multiplié par b, reproduit a. Les deux nombres a et b se nomment *dividende* et *diviseur* ; le quotient, c, se représente par le symbole $\frac{a}{b}$.

Nous allons montrer d'abord que le quotient existe ; pour cela, il nous suffit de rappeler que le nombre non nul, b, a un inverse, $\frac{1}{b}$; d'ailleurs si l'on désigne par b_1, b_2, ...,

---

(*) On peut déduire de là la règle de multiplication de deux sommes, comme au n° 39. On peut même en déduire le produit d'une somme S par une différence de la forme $a'-b'+c'$, par exemple. Car soient

$$S=a+b+c+d \qquad \text{et} \qquad S'=a'-b'+c' ;$$

on a $$S'+b'=a'+c' ;$$

par suite, $$SS'+Sb'=(a+b+c+d)(a'+c'),$$

$$SS'+Sb'=aa'+ba'+ca'+da'+ac'+bc'+cc'+dc' ;$$

or $$Sb'=ab'+bb'+cb'+db' ;$$

donc on a $$SS'=aa'+ba'+ca'+da'+ac'+bc'+cc'+dc'$$
$$-ab'-bb'-cb'-db'.$$

Ce résultat diffère du résultat relatif à deux sommes, en ce que les termes qui proviennent du terme à soustraire, doivent être aussi soustraits dans le résultat.

b_μ, ... la suite (*) qui définit le nombre b, son inverse $\frac{1}{b}$ est défini par la suite $\frac{1}{b_1}$, $\frac{1}{b_2}$, ..., $\frac{1}{b_\mu}$, ..., pourvu que la suite des nombres b_μ ne contienne pas de nombre nul, ce que l'on peut toujours supposer (n° 148) ; il en résulte que le produit d'un nombre b par son inverse $\frac{1}{b}$ est égal à l'unité. Cela posé, considérons le nombre $a \times \frac{1}{b}$ ou $\frac{1}{b} \times a$; le produit de ce nombre par b est $a \times \frac{1}{b} \times b$ ou a; donc le nombre $a \times \frac{1}{b}$ est le quotient de a par b, et l'on peut écrire $a \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \times a = \frac{a}{b}$.

Il nous reste à faire voir maintenant que ce nombre est unique : pour établir ce point, il suffit évidemment de montrer que si l'on multiplie un nombre non nul, b, par deux nombres inégaux, c et c', les produits obtenus sont inégaux. Désignons, à cet effet, le plus grand des deux par c', et par

$$\begin{array}{lllll} b_1, & b_2, & \ldots\ldots, & b_\mu, & \ldots\ldots, \\ c_1, & c_2, & \ldots\ldots, & c_\mu, & \ldots\ldots, \\ c'_1, & c'_2, & \ldots\ldots, & c'_\mu, & \ldots\ldots \end{array}$$

les trois suites qui définissent les nombres b, c, c'. A partir d'un certain rang, p, nous aurons nécessairement $b_\mu > h$ et $c'_\mu > c_\mu + k$, h et k étant certains nombres rationnels ; par suite $b_\mu c'_\mu > b_\mu c_\mu + b_\mu k$, et, *a fortiori*, $b_\mu c'_\mu > b_\mu c_\mu + hk$. Nous voyons donc que le nombre bc', qui est défini par la suite des nombres $b_\mu c'_\mu$, est plus grand que le nombre bc, défini par la suite des $b_\mu c_\mu$.

La division est donc une *opération uniforme*.

(*) Il est entendu que, dans cet exposé, sauf quand cela sera dit expressément, et plus tard, les suites employées sont rationnelles et convergentes.

La division jouit encore des propriétés évidentes

$$\frac{a}{1} = a, \qquad \frac{0}{b} = 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{b} = 1.$$

Cette opération se ramène à la multiplication ; il suffit, pour le voir, d'énoncer explicitement le résultat établi antérieurement : *on obtient le quotient de* a *par* b, *en multipliant* a *par l'inverse de* b.

On eût pu établir autrement les résultats qui précèdent : partir des deux suites

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_\mu, \quad \ldots\ldots,$$
$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots\ldots, \quad b_\mu, \quad \ldots\ldots$$

qui définissent a et b, remarquer que la seconde définissant un nombre non nul, on peut supposer tous les nombres qu'elle contient supérieurs à un certain nombre rationnel, h, et former la suite

$$\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{a_\mu}{b_\mu}, \quad \ldots\ldots;$$

montrer ensuite que cette suite est convergente et en conclure qu'elle définit un nombre, c. A ce moment, il est visible que le nombre c, multiplié par b, donne pour produit le nombre a ; c'est donc le quotient de a par b.

On démontrerait enfin que ce résultat est unique, en considérant d'autres suites

$$a'_1, \quad a'_2, \quad \ldots\ldots, \quad a'_\mu, \quad \ldots\ldots,$$
$$b'_1, \quad b'_2, \quad \ldots\ldots, \quad b'_\mu, \quad \ldots\ldots,$$

définissant les nombres a et b, et en montrant que les deux suites

$$\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{a_\mu}{b_\mu}, \quad \ldots\ldots,$$
$$\frac{a'_1}{b'_1}, \quad \frac{a'_2}{b'_2}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{a'_\mu}{b'_\mu}, \quad \ldots\ldots$$

définissent le même nombre.

152. Définition du radical arithmétique. — Soit m un nombre entier donné. La puissance m^e d'un nombre entier quelconque est un autre nombre entier, qui contient les mêmes facteurs premiers que lui, mais avec des exposants m fois supérieurs à ceux qu'ils ont dans le nombre donné. La puissance m^e d'un nombre rationnel irréductible quelconque $\frac{\alpha}{\beta}$ est le nombre irréductible $\frac{\alpha^m}{\beta^m}$: ce nombre est irréductible, car les nombres α^m et β^m, ayant respectivement les mêmes facteurs premiers que α et β, n'ont aucun facteur commun.

Il résulte de là que si un nombre rationnel, réduit à sa plus simple expression, n'a pas pour termes deux puissances m^{es} exactes, il n'est la puissance m^e d'aucun nombre rationnel. L'énoncé de cette propriété s'applique aux nombres entiers, dont chacun peut revêtir la forme fractionnaire, $\frac{a}{1}$.

Cela posé, considérons un nombre, a, qui ne soit la puissance m^e d'aucun nombre rationnel, — s'il est lui-même rationnel, — ou qui soit irrationnel, et cherchons les valeurs approchées de la racine m^e de a, à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, ..., $\frac{1}{10^\mu}$, ... près. En procédant comme nous l'avons fait dans le cas de la racine carrée et de la racine cubique, nous appellerons *valeurs approchées par défaut et par excès, à* $\frac{1}{10^\mu}$ *près, de la racine* m^e *de* a, les deux multiples de $\frac{1}{10^\mu}$, $\frac{p_\mu}{10^\mu}$ et $\frac{p_\mu+1}{10^\mu}$, qui vérifient la double inégalité suivante :

$$\left(\frac{p_\mu}{10^\mu}\right)^m < a < \left(\frac{p_\mu+1}{10^\mu}\right)^m.$$

Désignons alors par a_1, a_2, a_3, ..., a_μ, ... la suite des valeurs approchées par défaut, et par

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ldots,\ b_\mu,\ \ldots\ldots$$

la suite des valeurs approchées par excès.

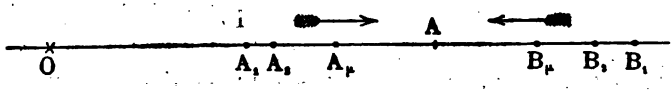
La première suite est croissante, la seconde est décroissante ; car la double inégalité écrite plus haut peut s'écrire encore

$$\left(\frac{10p_\mu}{10^{\mu+1}}\right)^m < a < \left(\frac{10(p_\mu+1)}{10^{\mu+1}}\right)^m,$$

et elle montre que la valeur approchée par défaut, à $\frac{1}{10^{\mu+1}}$ trés, n'est pas moindre que la précédente, $\frac{10p_\mu}{10^{\mu+1}}$; de même la valeur approchée par excès, à $\frac{1}{10^{\mu+1}}$ près, n'est pas supérieure à celle qui la précède, $\frac{10(p_\mu+1)}{10^{\mu+1}}$ (Voir ce qui précède, n° 148).

La différence entre b_μ et a_μ est $\frac{1}{10^\mu}$; elle tend vers 0, quand μ augmente indéfiniment.

Si donc on porte sur une droite, à partir d'un même point O, et dans le même sens, des longueurs



OA_1, OA_2, ..., OA_μ, ..., ayant pour mesures les nombres $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_\mu, \ldots\ldots$, et des longueurs OB_1, OB_2, ..., OB_μ, ..., ayant pour mesures les nombres b_1, b_2, ..., b_μ, ..., le point mobile qui décrit l'ensemble des points A_μ, marche de gauche à droite, ou reste stationnaire, à certains moments, le point mobile qui décrit l'ensemble des points B_μ, marche de droite à gauche, ou reste stationnaire, à certains moments ; le premier point est toujours à gauche du second, et la distance qui les sépare, $A_\mu B_\mu$, tombe, lorsque μ est assez grand, au-dessous de toute longueur. Donc, ces

deux ensembles de points ont un point-limite commun, A, et les longueurs OA_μ, OB_μ ont pour limite commune OA.

Le nombre, α, qui mesure cette longueur OA est la limite commune des deux suites a_μ et b_μ et se nomme la *racine* m^e *de* a.

Nous allons établir maintenant que la puissance m^e de α est égale à a. Nous nous appuierons, pour cela, sur les propriétés suivantes :

Si deux nombres sont inégaux, leurs puissances m^{es} *sont inégales, et la plus grande des deux correspond au plus grand des deux nombres.*

Soit, en effet, $a < b$; on a $a^2 < ab$, d'après une propriété établie au début de la division, et $ab < b^2$; donc $a^2 < b^2$; de même $a^3 < b^2a$, et $b^2a < b^3$; donc $a^3 < b^3$; et ainsi de suite.

Si b *désigne un nombre plus grand que* a, *on a l'égalité suivante :*

$$b^m - a^m = (b - a)(b^{m-1} + b^{m-2}a + b^{m-3}a^2 + \ldots\ldots + a^{m-1}).$$

Car, en multipliant la différence $b - a$ successivement par b^{m-1}, $b^{m-2}a$, $b^{m-3}a^2$, ..., on a (n° 42)

$$b^m - ab^{m-1},\quad ab^{m-1} - a^2b^{m-2},\quad a^2b^{m-2} - a^3b^{m-3},\ \ldots\ldots,$$
$$a^{m-1}b - a^m,$$

et la somme de ces nombres est $b^m - a^m$.

Revenons maintenant aux suites des a_μ et b_μ, qui nous ont servi à définir le nombre α. La longueur OA est toujours comprise entre OA_μ et OB_μ, quel que soit μ ; on a donc toujours $a_\mu < \alpha < b_\mu$; d'où $a_\mu^m < \alpha^m < b_\mu^m$; d'autre part, à partir d'un certain rang, p, les longueurs des deux suites sont moindres qu'une certaine longueur L_h, supérieure à OA, et ayant pour mesure le nombre rationnel h. On a donc d'abord

$$b_\mu^m - a_\mu^m = (b_\mu - a_\mu)(b_\mu^{m-1} + b_\mu^{m-2}a_\mu + \ldots\ldots + a_\mu^{m-1}),$$

et ensuite,

$$b_\mu^m - a_\mu^m < (b_\mu - a_\mu) m . h^{m-1},$$

$$b_\mu^m - a_\mu^m < \frac{mh^{m-1}}{10^\mu}.$$

Cette différence tend vers 0, quand l'indice μ augmente indéfiniment ; donc les deux nombres a et α^m, tous deux compris entre a_μ^m et b_μ^m, sont égaux.

Nous appellerons donc *racine* m^e^ *de* a ou *radical arithmétique d'ordre* m *portant sur un nombre* a, un nombre α qui, élevé à la puissance m, reproduit le nombre a. Nous désignerons ce nombre par le symbole $\sqrt[m]{a}$, qui se lit : *racine* m^e^ *de* a.

Un nombre n'a qu'une racine m^e^ ; car les puissances m^{es} de deux nombres distincts sont distinctes.

La racine m^e de 0 est 0 ; celle de 1 est 1. $\sqrt[1]{a}$ doit être considéré comme égal à a, $\sqrt[0]{a}$ n'a aucun sens. La racine carrée se représente par $\sqrt[2]{a}$ ou, pour abréger, par $\sqrt{a}$

Il nous reste maintenant à montrer qu'on peut définir le nombre α d'une infinité de façons, à l'aide de suites convergentes. Pour cela, considérons une suite infinie de nombres entiers croissants

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots\ldots, \quad n_\mu, \quad \ldots\ldots,$$

et prenons à chaque fois les valeurs approchées de la racine m^e à $\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \ldots\ldots, \frac{1}{n_\mu}, \ldots\ldots$ près, c'est-à-dire, pour $\frac{1}{n_\mu}$, les deux nombres $\frac{p_\mu}{n_\mu}$ et $\frac{p_\mu + 1}{n_\mu}$ tels que l'on ait

$$\left(\frac{p_\mu}{n_\mu}\right)^m < a < \left(\frac{p_\mu + 1}{n_\mu}\right)^m;$$

nous aurons nécessairement, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$\frac{p_\mu}{n_\mu} < \alpha < \frac{p_\mu + 1}{n_\mu};$$

si donc nous formons une suite infinie de nombres rationnels,

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_\mu, \quad \ldots,$$

en prenant à chaque fois l'une des deux valeurs approchées, la suite ainsi obtenue aura pour limite le nombre α. Car le nombre α est compris entre c_μ et la seconde valeur approchée qui correspond au nombre n_μ ; par conséquent la différence entre α et le nombre c_μ est moindre que la différence entre les deux valeurs approchées qui correspondent au nombre n_μ, c'est-à-dire moindre que $\frac{1}{n_\mu}$; cette différence tend donc vers 0, quand l'indice μ augmente indéfiniment.

Ce qui précède nous montre qu'il existe des longueurs incommensurables avec l'unité de longueur. Car si nous considérons un nombre qui ne soit pas un carré parfait, par exemple le nombre 3, et si nous désignons par α la racine carrée de ce nombre, définie comme il a été dit, à l'aide d'une longueur-limite OA, nous aurons $\alpha^2 = 3$; d'autre part, nous savons que α n'est pas un nombre rationnel ; donc la longueur OA n'est pas commensurable avec l'unité. Nous eussions pu choisir pour exemple toute autre racine d'un nombre rationnel, pourvu que l'on eût constaté à l'avance que cette racine est irrationnelle.

153. Calcul des radicaux arithmétiques. — On appelle *indice* d'un radical, $\sqrt[m]{a}$, le nombre m. Si un radical porte sur une puissance de a, a^p, le nombre p s'appelle l'*exposant* du radical.

1° *Le produit de deux radicaux de même indice est un radical de même indice portant sur le produit des nombres placés sous les radicaux.*

Il s'agit de démontrer que l'on a

$$\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}.$$

Pour cela, désignons par α, β, γ les valeurs des trois radicaux et élevons les deux nombres $\alpha\beta$ et γ à la puissance m ; nous aurons $(\alpha\beta)^m = \alpha^m\beta^m$ et γ^m. Or $\alpha^m = a$, $\beta^m = b$, $\gamma^m = ab$; donc $\gamma^m = (\alpha\beta)^m$. Les deux nombres γ et $\alpha\beta$ ont même puissance m^e ; donc ils sont égaux.

On démontre de la même manière le théorème suivant, qui est une généralisation du premier.

2° *Le produit d'un nombre quelconque de radicaux de même indice est un radical de même indice portant sur le produit des nombres soumis aux divers radicaux.*

3° *Le quotient de deux radicaux de même indice est un radical de même indice portant sur le quotient des deux nombres soumis aux radicaux.*

Il s'agit de démontrer que l'on a

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

Pour cela, désignons par α, β et γ les trois radicaux, et élevons les deux nombres $\frac{\alpha}{\beta}$ et γ à la puissance m; nous aurons $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m = \frac{\alpha^m}{\beta^m}$ et γ^m. Or $\alpha^m = a$, $\beta^m = b$ et $\gamma^m = \frac{a}{b}$; donc $\gamma^m = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m$. Les deux nombres γ et $\frac{\alpha}{\beta}$ ont même puissance m^e ; donc ils sont égaux.

Exemples. $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$;

$$\sqrt[4]{2}.\sqrt[4]{3}.\sqrt[4]{8}.\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{2.3.8.27} = \sqrt[4]{2^4.3^4} = 2.3 = 6;$$

$$\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

4° *Pour élever un radical à une puissance, il suffit de multiplier l'exposant du radical par celui de la puissance indiquée.*

Il s'agit de démontrer que l'on a

$$(\sqrt[m]{a^p})^n = \sqrt[m]{a^{pn}}.$$

Or on a $(\sqrt[m]{a^p})^n = \sqrt[m]{a^p}.\sqrt[m]{a^p} \ldots\ldots \sqrt[m]{a^p}$, ($n$ fois)

et, d'après 2°, le second membre est égal à

$$\sqrt[m]{a^p.a^p\ldots a^p(n \text{ fois})} \text{ ou } \sqrt[m]{a^{p+p+\cdots+p}} \text{ ou } \sqrt[m]{a^{pn}}.$$

Exemples : $(\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$;

$$(\sqrt[10]{20})^5 = \sqrt[10]{20^5} = \sqrt[10]{2^{10}5^5} = \sqrt[10]{2^{10}}.\sqrt[10]{5^5} = 2.\sqrt[10]{5^5}.$$

5° *Pour extraire une certaine racine d'un radical, il suffit de multiplier son indice par celui de la racine à extraire.*

Il s'agit de démontrer que l'on a

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Pour cela, élevons les deux membres à la puissance mn ; le second donne par définition a ; pour avoir le résultat auquel conduit le premier, il suffit de se rappeler que l'on élève un nombre à la puissance mn en élevant ce nombre d'abord à la puissance n, puis le résultat à la puissance m ; on a ainsi $\sqrt[m]{a}$, d'abord, puis a. Les deux membres ont donc même puissance mn^e ; donc ils sont égaux.

Cette propriété permet dans bien des cas de ramener l'extraction d'une racine à d'autres opérations plus simples. Ainsi l'extraction d'une racine quatrième se ramène à deux racines carrées successives, l'extraction d'une racine sixième à une racine cubique d'abord, puis à une racine carrée, ou à une racine carrée suivie d'une racine cubique ; etc. Ainsi

$$\sqrt[4]{256} = \sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt{16} = 4;$$

$$\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

Il résulte aussi des deux dernières propriétés que :

6° *On n'altère pas la valeur d'un radical en multipliant l'indice et l'exposant par le même nombre.*

Ainsi $\sqrt[mn]{a^{pn}} = \sqrt[m]{a^p}.$

Car en multipliant l'indice par n, on extrait la racine n^e du radical $\sqrt[m]{a^p}$, et, en multipliant ensuite l'exposant par n, on élève le nouveau nombre à la puissance n^e. On retombe donc sur le premier nombre.

Cette propriété peut aussi se démontrer directement, en élevant les deux membres à la puissance mn^e.

Elle peut s'énoncer d'une autre façon :

7° *On n'altère pas la valeur d'un radical, en divisant, quand cela se peut, l'indice et l'exposant par le même nombre.*

On peut déduire de là une règle de simplification des radicaux.

Règle. — *Pour simplifier un radical arithmétique, on divise l'indice et l'exposant par leur plus grand commun diviseur.*

Exemples: $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2.2} = \sqrt{2^2}.\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$;

$$\sqrt[10]{288} = \sqrt[10]{2^5.3^2} = \sqrt[10]{2^5}.\sqrt[10]{3^2} = \sqrt{2}.\sqrt[5]{3}.$$

On peut appliquer les mêmes propriétés à la réduction des radicaux au même indice. A cet effet, on choisit un multiple commun à tous les indices, M ; on divise ce nombre par l'indice de l'un quelconque des radicaux : soit M′ le quotient obtenu ; on multiplie ensuite l'indice et l'exposant de ce radical par M′. En procédant ainsi pour tous les radicaux, on n'altère pas leurs valeurs respectives, et on leur donne le même indice, M.

Exemple : $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{12}$, $\sqrt[5]{42}$.

Prenons pour indice commun le produit des indices, 30 ; nous aurons à multiplier l'indice et l'exposant du premier radical par 15, l'indice et l'exposant du second radical par 10 ; enfin l'indice et l'exposant du dernier radical par 6. Nous obtenons ainsi les trois radicaux

$$\sqrt[30]{6^{15}} = \sqrt[30]{2^{15}3^{15}},$$

$$\sqrt[30]{12^{10}} = \sqrt[30]{2^{20}3^{10}}$$

et

$$\sqrt[30]{42^6} = \sqrt[30]{2^6 3^6 7^6}$$

Si l'on veut avoir ensuite le produit des trois radicaux donnés, on obtiendra un seul radical d'indice 30,

$$\sqrt[30]{2^{11}3^{31}7^{6}} = 6\sqrt[30]{2^{11}.3.7^{6}}.$$

* **154. Nombres irrationnels négatifs.** — Si l'on désigne par a et b deux nombres ordinaires quelconques, rationnels ou irrationnels, et que l'on suppose $a > b$, l'égalité conditionnelle $b + c = a$ définit un nombre c et un seul, que nous avons appris à calculer dans les diverses soustractions qui ont été exposées au cours de cet ouvrage. Mais si b est plus grand que a, la soustraction indiquée est impossible ; pour la rendre possible, il faut introduire un nouveau symbole numérique, différant par l'une de ses propriétés des symboles antérieurs. Nous remarquerons, à cet effet, que $b - a$ existe, et nous désignerons par c' ce nombre ; nous aurons alors $b - a = c'$ ou $b - c' = a$. Pour identifier cette égalité avec l'égalité conditionnelle $b + c = a$, nous poserons $c = -c'$, nous appellerons ce nouveau nombre un *nombre négatif*, et nous conviendrons que $b + (-c') = b - c'$, c'est-à-dire que *pour ajouter à un nombre positif un nombre négatif de valeur numérique moindre, on fait abstraction du signe d'addition et on fait la soustraction qui reste indiquée.*

Les nombres ordinaires se nomment des *nombres positifs* ; on leur adjoint le signe $+$; la valeur numérique d'un nombre, abstraction faite de son signe, se nomme la *valeur absolue* de ce nombre.

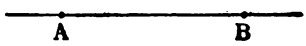
Si l'on reprend alors tous les raisonnements déjà faits (nos 30, 31, 32, 43, 44, 45, 46, 56) et déduits de la convention précédente et de l'obligation pour les égalités $b + c = a$, $b = a - c$, $c = a - b$, d'être équivalentes, on établit, comme cela a été fait aux nos rappelés, les règles de calcul des nombres positifs et négatifs ; il n'y a de différence que pour le calcul de la valeur absolue de chacun des résultats ; mais cette question a été amplement traitée dans le chapitre actuel. Il résulte de ces règles que les nombres positifs se comportent comme des nombres ordinaires, et, dans la plupart des cas, le signe $+$ afférent à un nombre n'est pas indiqué.

* **155. Segments. — Représentation des nombres par des segments.** — Nous avons montré dans tout ce qui précède qu'à toute longueur correspond une idée numérique bien déterminée, et nous avons déduit de cet élément géométrique la définition du nombre rationnel et aussi du nombre irrationnel.

Comme nous avons appelé nombres égaux les nombres qui mesurent des longueurs égales, il en résulte nécessairement qu'à une longueur donnée ne correspond qu'un seul nombre.

Il y a donc une correspondance complète et uniforme entre l'idée de longueur et l'idée de nombre, et la représentation géométrique du nombre ne laissera plus rien à désirer pour nous, si nous parvenons à représenter les nombres négatifs d'une manière analogue.

Ce but est atteint d'une façon très aisée en donnant un sens aux longueurs comptées sur une droite. Pour cela, nous regarderons une longueur AB comme étant parcourue par un point mobile, toujours dans le même sens, et d'une extrémité à l'autre ; et, pour distinguer ce nouvel élément de la simple longueur, nous l'appellerons un *segment*. Nous entendrons par là une portion de droite affectée d'un sens, un élément géométrique composé formé de deux éléments géométriques simples : le *sens* et la *longueur*.

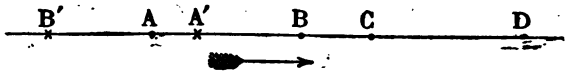


Comme il y a deux sens de marche sur une droite, il y a aussi deux espèces de segments : les uns, parcourus dans un sens déterminé, choisi à l'avance, et que nous nommerons *segments de première espèce* ; les autres, parcourus en sens contraire, et que nous nommerons *segments de seconde espèce*.

Le point d'où part le mobile s'appelle l'*origine* du segment ; le point où il arrive s'appelle l'*extrémité*.

Pour lire un segment, on énonce d'abord la lettre placée à l'origine, puis celle placée à l'extrémité. Ainsi le segment AB est la longueur AB parcourue par un mobile de A vers B.

Cela posé, choisissons sur une droite quelconque un sens déterminé, celui de la flèche, par exemple, et prenons pour sens des segments de première espèce le sens ainsi fixé.



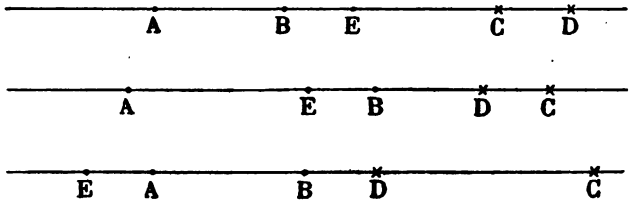
Alors tous les segments parcourus dans ce sens et tels que AB, CD et B′A′ sont des segments de première espèce ; ceux qui sont parcourus en sens contraire, et tels que A′B′, BA et DC, sont des segments de seconde espèce.

Nous dirons que deux segments sont *égaux* quand ils ont les mêmes éléments constitutifs : *sens et longueur*. *Ex.* : AB et CD, A′B′ et DC.

Nous dirons que deux segments sont *égaux et opposés*, quand ils ne diffèrent que par le sens. *Ex.* : AB et A′B′, AB et BA.

Nous appellerons *somme* de deux segments le segment obtenu en portant à la suite de l'un d'eux un segment égal à l'autre et dont l'origine soit placée à l'extrémité de cet autre. Ainsi, en pre-

nant le segment BE égal au segment CD, on obtient un segment AE, qui est la somme des deux segments AB et CD.



Il suffit de regarder les trois figures indiquées ci-dessus, pour apercevoir que :

La somme de deux segments de même espèce est un segment de même espèce qu'eux et ayant pour longueur la somme de leurs longueurs ;

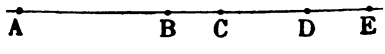
La somme de deux segments d'espèces différentes, est de l'espèce de celui qui a la plus grande longueur, et a pour longueur la différence de leurs longueurs.

Il est alors aisé de s'élever à l'idée de somme de plusieurs segments A_1B_1, A_2B_2,....., A_nB_n : on forme d'abord la somme des deux premiers, puis, au segment ainsi obtenu, on ajoute le troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé les segments donnés, dans l'ordre où ils ont été donnés.

Cet ordre lui-même est indifférent, car on voit de suite que la somme de deux segments n'est pas altérée par le changement de l'ordre d'addition ; il suffit, pour cela, de se reporter aux deux résultats que l'on vient d'énoncer. Si l'on remarque en outre que dans une somme on peut remplacer deux segments consécutifs par leur somme effectuée, on verra de suite qu'il est permis d'écrire tous les segments d'une somme dans un ordre quelconque, et aussi de remplacer un nombre quelconque d'entre eux par leur somme effectuée.

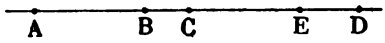
Il suit de là que pour effectuer la somme de plusieurs segments d'espèces quelconques, on peut faire d'abord la somme des segments de première espèce, puis celle des segments de seconde espèce, chacune de ces sommes s'obtenant comme une somme de longueurs ; puis, cela fait, ajouter les deux segments ainsi obtenus l'un à l'autre, d'après la première règle, c'est-à-dire en formant un segment de même espèce que celui qui a la plus grande longueur et dont la longueur soit la différence entre celles des deux sommes partielles.

On appelle *différence* entre deux segments, AB et CD, le segment DE qu'il faut ajouter au second pour avoir le premier.

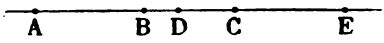


Il résulte de la règle d'addition de deux segments que : si les deux segments sont de même espèce, et si le second est de longueur moindre que le premier, la différence entre eux est de même espèce qu'eux et a pour longueur la différence entre les longueurs des deux segments ; si, au contraire, la longueur du second dépasse celle du premier, la différence entre les deux segments est d'espèce contraire et a pour longueur la différence entre les longueurs données.

Mais si les segments sont d'espèces différentes, il faut ajouter au second un segment de même espèce que le premier et dont la longueur soit égale à la somme des deux longueurs.



En résumé, si l'on se reporte aux trois cas que nous venons d'étudier, on voit que pour soustraire un segment CD d'un autre segment quelconque AB, il faut changer le sens du segment CD, et l'ajouter ensuite au segment AB ; car, dans les trois cas, on a $DE = DC + CE = DC + AB$, puisque $CE = AB$, par définition.

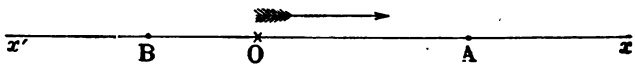


Cela nous montre que les segments se combinent entre eux, par voie d'addition et de soustraction, comme les nombres positifs et négatifs ; et c'est cette remarque qui a conduit à représenter les segments par des nombres positifs et négatifs.

Nous appellerons alors *valeur* d'un segment le nombre qui a pour valeur absolue la mesure de la longueur de ce segment, et pour signe + ou —, suivant que le segment est de première espèce ou de seconde espèce.

De la sorte, les deux éléments du segment sont représentés : la longueur, par un nombre absolu ; et le sens, par un signe.

Pour représenter tous les nombres, il suffit alors d'envisager une droite quelconque $x'x$, sur laquelle on choisit un sens, le sens $x'x$, par exemple, et un point O. Le sens choisi sera, par



convention, celui des segments de première espèce ou positifs ; le point O sera l'origine commune à tous les segments représentatifs de nombres. Alors chaque nombre positif sera repré-

senté par un segment issu de O, et parcouru dans le sens de la flèche, tel que OA, et chaque nombre négatif, par un segment issu de O, et parcouru en sens inverse, tel que OB.

Et de ces conventions résulte qu'à tout nombre donné correspond un point bien déterminé de la droite, et réciproquement, qu'à tout point donné de la droite correspond un nombre bien déterminé en valeur absolue et en signe.

En raison de cette correspondance absolue, uniforme et réciproque, entre les points de $x'x$ et les nombres positifs ou négatifs, nous dirons souvent point A, au lieu de nombre a, et inversement.

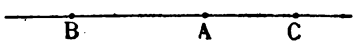
Nous désignerons la droite $x'x$, utilisée ainsi, sous le nom d'*axe des nombres*.

Nous représenterons le nombre attaché à chaque segment AB, par la même notation que le segment lui-même, AB. Alors, nous pourrons écrire $AB = -BA$, ou $AB + BA = 0$.

Le théorème suivant est une généralisation de cette formule :

THÉORÈME. — *Entre les nombres représentatifs des segments déterminés par trois points en ligne droite,* A, B, C, *on a toujours* $AB + BC + CA = 0$, *quelles que soient les situations respectives des trois points, et quel que soit le sens adopté comme sens positif.*

Il y a toujours, en effet, un des trois points qui est compris entre les deux autres; soit A ce point. On a alors nécessairement $CB = CA + AB$, en grandeur et en signe, puisque ces trois segments ont le même sens et que le segment CB a une longueur égale à la somme des longueurs des deux segments CA et AB. Mais $CB = -BC$; donc on a

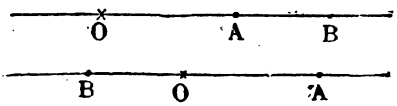


$$CA + AB = -BC,$$

et, en ajoutant BC aux deux membres de cette égalité,

$$AB + BC + CA = 0.$$

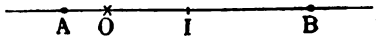
Conséquence. — Si on considère deux points de l'axe des nombres, A et B, donnés par les segments OA et OB, représentatifs de deux nombres donnés a et b, il est facile d'avoir la valeur du segment AB. Il suffit, en effet, d'appliquer le théorème précédent, en partant du point O, et d'écrire



$$OA + AB + BO = 0 ;$$

d'où $$AB = OB - OA = b - a.$$

Introduisons aussi le milieu I du segment AB et proposons-nous d'évaluer le segment OI, à l'aide des deux segments $OA = a$ et $OB = b$. Nous avons successivement



$$OA + AI + IO = 0 \quad \text{ou} \quad OI = OA + AI,$$
$$OB + BI + IO = 0 \quad \text{ou} \quad OI = OB + BI\ ;$$

or $AI = -BI$; donc, en ajoutant les deux égalités précédentes, on a

$$2OI = OA + OB\ ; \qquad \text{d'où} \qquad OI = \frac{OA + OB}{2},$$

$$OI = \frac{a + b}{2}.$$

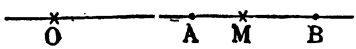
Les nombres, positifs ou négatifs, envisagés comme symboles représentatifs des points d'une droite, se nomment des *abscisses*. Si $a = OA$, le nombre a s'appelle l'*abscisse* du point A.

L'ensemble de tous les nombres compris entre deux nombres donnés, a et b, en y adjoignant a et b eux-mêmes, se nomme un *intervalle*, l'intervalle (a, b). Un intervalle est figuré sur l'axe des nombres par tous les points du segment AB, dont les extrémités représentent les nombres a et b.

Le nombre $b - a$, qui représente le segment AB, s'appelle l'*étendue* de l'intervalle (a, b).

Un pareil ensemble est *continu* ; il ne contient pas de nombres consécutifs. En regardant l'idée de continuité comme une idée fondamentale et géométrique, nous dirons qu'un pareil ensemble constitue le *continu absolu indépendant*.

Si un nombre peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle, nous dirons que ce nombre est une *variable*. On regarde alors le segment correspondant AB comme étant parcouru par un point mobile, M, dans un sens ou dans l'autre, et le nombre variable est à chaque instant la valeur du segment OM. Il est impossible à l'esprit de concevoir comment cela peut être réalisé, car étant donnée une position du point M, la position suivante n'est pas assignable ; la même difficulté existe au point de vue numérique, si l'on considère le nombre variable, $x = OM$, qui parcourt l'intervalle (a, b). L'esprit humain ne se rend compte que des ensembles discontinus, ou qui peuvent être présentés ainsi.



L'arithmétique ne considère que des variables pouvant prendre toutes les valeurs d'ensembles discontinus. Celles dont nous parlons sont du domaine de l'Algèbre et de la haute analyse.

*156. **Différence fondamentale qui existe entre l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble total des nombres** (*). — *Les nombres rationnels peuvent être classés dans une suite infinie, c'est-à-dire que l'on peut écrire une suite où chaque nombre rationnel soit mis à une place bien déterminée.*

En effet, écrivons tous les nombres rationnels, entiers compris sous la forme $\frac{\alpha}{\beta}$, α et β étant des entiers premiers entre eux. La somme $S = \alpha + \beta$ est au moins égale à 2.

Il y a un nombre pour lequel $S = 2$; c'est $\frac{1}{1}$ ou 1.

Il y a deux nombres pour lesquels $S = 3$; ce sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{1}$ ou 2.

Il y a deux nombres pour lesquels $S = 4$; ce sont $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{1}$ ou 3.

Et ainsi de suite.

Rangeons de même par ordre de grandeur croissante les nombres pour lesquels $S = N$, et écrivons tous les nombres rationnels, tels que nous les obtenons ainsi, les uns à la suite des autres; nous aurons formé une suite infinie, dans laquelle chaque nombre rationnel positif occupe une place bien déterminée.

Nous pouvons à chaque fois adjoindre aux nombres d'un groupe, les nombres négatifs de mêmes valeurs absolues, et les ranger tous par ordre de grandeur croissante; nous aurons alors une suite infinie où tout nombre rationnel occupe une place bien déterminée,

$$-1,\ +1,\ -2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2,\ -3,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 3,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots$$

Par ce procédé l'ensemble continu des nombres rationnels se trouve mis sous forme d'ensemble discontinu.

Nous allons montrer maintenant que *les nombres d'un intervalle* (a, b), *c'est-à-dire d'un continu absolu, ne peuvent pas se classer ainsi dans une suite infinie.*

Pour cela, nous allons montrer que quelle que soit la suite infinie considérée

---

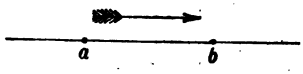
(*) L'idée de longueur ne permet pas d'introduire d'autres nombres que les trois espèces de nombres déjà obtenus : nombres entiers, nombres fractionnaires, nombres irrationnels. Car, avec ces trois espèces de nombres nous avons obtenu les mesures de toutes les longueurs. — On peut bien considérer des suites infinies et convergentes de nombres quelconques, rationnels ou irrationnels, et, à la vérité, ces suites s'introduisent dans nombre de questions; mais chacune d'elles conduit à une longueur limite, qui est représentée par un nombre entier ou fractionnaire ou irrationnel.

Ces nouvelles suites se combinent aussi aisément que celles que nous avons étudiées.

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots,$$

il y a toujours dans un intervalle, si petit qu'il soit, des nombres qui n'appartiennent pas à la suite.

Soit, en effet, (a, b) un intervalle donné, figuré par le segment ab; parcourons la suite u_k jusqu'à ce que nous ayons rencontré un nombre u_{p_1}, qui tombe entre a et b, puis, de nouveau, jusqu'à ce que nous ayons rencontré un nombre u_{q_1}, qui tombe encore entre a et b; soient a_1 et b_1 les deux nombres u_{p_1} et u_{q_1}, rangés par ordre de grandeur croissante. Avant l'indice $q_1 > p_1$, il n'y a pas de nombre de la suite qui tombe entre a_1 et b_1.

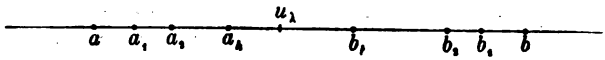


Parcourons maintenant la suite, à partir de u_{q_1}, jusqu'à ce que nous rencontrions un nombre u_{p_2}, puis un second, u_{q_2}, qui tombent tous deux entre a_1 et b_1; soient a_2 et b_2 ces deux nombres rangés par ordre de grandeur croissante. Avant l'indice $q_2 (q_2 > p_2 > q_1 > p_1)$, il n'y a pas de nombre de la suite qui tombe entre a_2 et b_2.

Et ainsi de suite.

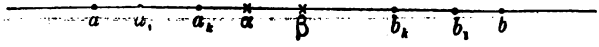
Alors divers cas peuvent se présenter :

Ou bien, à partir d'un certain rang, nous ne trouverons plus de nombre tombant dans le dernier intervalle formé, (a_h, b_h), et

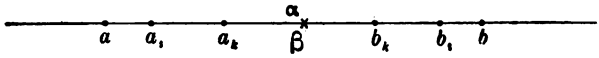


aucun des nombres compris entre a_h et b_h n'appartient à la suite; ou bien il n'y aura qu'un nombre de la suite, u_λ, tombant dans un dernier intervalle formé comme il a été dit, (a_h, b_h), et aucun des autres nombres compris entre a_h et b_h n'appartient à la suite.

Ou bien enfin ceci n'arrive jamais, et l'on peut toujours former des intervalles (a_k, b_k) par le procédé indiqué : alors les points $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\ldots$ ont nécessairement une limite, α, les



points $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_k, \ldots\ldots$ une limite, β. (N° 147.) Si ces deux points ne coïncident pas, aucun des nombres compris entre α et β



ne fait partie de la suite. Si ces deux points coïncident, le nombre α ne fait pas partie de la suite, car, au bout d'un certain

nombre d'opérations, il eût été rencontré, puisqu'il est compris entre tous les couples de nombres a_k et b_k.

CONSÉQUENCE. — *On ne peut pas classer tous les nombres d'un intervalle* (a, b) *en une suite infinie.*

Nous ne connaissons aucun moyen de transformer un continu absolu en un discontinu.

*157. **Égalités. — Inégalités.** — On dit que deux nombres sont *égaux*, lorsqu'ils représentent le même segment (ou bien lorsqu'ils ont le même signe et la même valeur absolue).

Deux nombres qui ne diffèrent que par le signe sont dits *égaux et de signes contraires*, ou *égaux et opposés.*

En arithmétique, il arrive souvent qu'un nombre n'est qu'indiqué par diverses opérations sur d'autres nombres, et non encore connu ; si deux nombres de ce genre sont égaux, on sépare les expressions qui indiquent les opérations à faire pour avoir chacun d'eux par le signe de l'égalité (=), et l'on obtient ce qu'on appelle une *égalité.*

Une égalité est donc de la forme

$$a + b + \ldots\ldots = a' + b' + \ldots\ldots,$$

en désignant par a, b, ..., a', b', ... des expressions complexes pouvant elles-mêmes indiquer plusieurs opérations à faire sur des nombres connus (*).

Les principales propriétés des égalités découlent des propriétés des diverses opérations et des règles de calcul relatives aux nombres positifs ou négatifs. Elles ont donc été déjà exposées. Bornons-nous à les rappeler.

On peut ajouter le même nombre, positif ou négatif, aux deux membres d'une égalité. Cela est d'ailleurs évident en ramenant tout à des sommes de segments.

On peut faire passer un terme d'un membre d'une égalité dans un autre, pourvu qu'on le change de signe. Cela revient à ajouter le même nombre aux deux membres, ce terme changé de signe.

On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une égalité par le même nombre, positif ou négatif. Cela résulte de ce que la multiplication et la divison sont des opérations uniformes.

On ne doit pas employer le multiplicateur 0, car il transforme toute égalité ou inégalité en une égalité inutilisable, $0 = 0$. *Ex* : 5 n'est pas égal à 7 et cependant $5 \times 0 = 7 \times 0$.

On ne peut pas diviser non plus par 0, sans quoi, l'égalité peut donner naissance à une inégalité. *Ex :* $a - b = c$.

(*) $a + b + \ldots\ldots$ et $a' + b' + \ldots\ldots$ sont les deux *membres* de l'égalité ; a, b, ..., a', b', ... sont les *termes.*

Multiplions les deux membres par $a - b$; nous aurons

$$a^2 - 2ab + b^2 = ac - bc,$$

ou

$$a(a - b - c) = b(a - b - c).$$

Si on divise par $a - b - c$, on trouve $a = b$, ce qui est, en général, absurde ; cela tient à ce que le diviseur $a - b - c$ est nul.

On peut multiplier ou diviser, membre à membre, deux égalités. Ici non plus, il ne faut pas employer l'égalité $0 = 0$, etc.

Deux nombres a et b qui ne sont pas égaux sont dits *inégaux*. Si la différence $a - b$ est positive, le nombre a est plus grand que le nombre b ; sinon, il est plus petit (*).

Si a est plus grand que b, on écrit $a > b$, ou $b < a$.

Si a est plus petit que b, on écrit $a < b$, ou $b > a$.

$a > b$ ou $a < b$ constitue une *inégalité* ; a et b sont les deux *membres* de cette égalité ; chacun d'eux peut se composer de plusieurs *termes*, c'est-à-dire être une indication d'opérations à effectuer pour avoir a ou b.

Le signe $>$ ou $<$ indique le *sens* de l'inégalité.

On peut, sans changer le sens d'une inégalité, ajouter le même nombre, positif ou négatif, aux deux membres. Car si $a > b$, on a aussi $a + c > b + c$, puisque $a + c - (b + c) = a - b$.

On peut faire passer un terme d'un membre d'une inégalité dans l'autre, pourvu que l'on change son signe. Ceci revient à ajouter ce terme, changé de signe, aux deux membres.

On peut multiplier les deux membres d'une inégalité par le même nombre positif.

Car écrire $a > b$, par exemple, revient à écrire $a = b + p$, p étant un nombre positif ; si on multiplie les deux membres de cette égalité par un nombre positif, c, on a

$$ac = bc + pc ;$$

or pc est positif ; donc $ac > bc$.

Si on multiplie les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif, elle change de sens.

Démonstration analogue à la précédente. Nous n'énonçons pas les théorèmes analogues pour la division par un nombre, k, car diviser par k revient à multiplier par $\frac{1}{k}$.

(*) Tout nombre positif est plus grand que tout nombre négatif et plus grand que 0 ; 0 est plus grand que tout nombre négatif ; deux nombres négatifs sont classés en sens inverse de leurs valeurs absolues. Si un nombre variable croît le point qui le figure sur l'axe des nombres marche dans le sens positif.

En remplaçant les deux membres d'une inégalité par leurs inverses, elle change de sens, si ces deux nombres ont le même signe ; sinon, elle garde son sens.

Soit $a > b$ l'inégalité considérée ; dans le premier cas, ab est positif, et, en divisant par ab, on a $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$, ou $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, c'est-à-dire $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; dans le second cas, ab est négatif, et on a $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$, ou $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, c'est-à-dire $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Si les nombres qui figurent dans deux inégalités de même sens sont positifs, on peut multiplier ces deux inégalités membre à membre.

Car soient, par exemple, $a > b$ et $a' > b'$ deux inégalités de même sens, a, b, a', b' étant positifs ; on a d'abord $a'a > a'b$, et $a'b > b'b$. Donc $aa' > bb'$.

Ce théorème est encore vrai, en supposant seulement a' et b positifs ; alors a est forcément positif.

Un théorème analogue a lieu pour la division membre à membre de deux inégalités de même sens.

EXERCICES

1° Si a et b sont deux nombres rationnels non carrés parfaits, l'expression $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ou $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est un nombre irrationnel. Généraliser.

2° Si a et b sont deux nombres rationnels non carrés parfaits, quelle doit être la forme de a pour que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ou $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ soit rationnel ?

3° a et b étant deux nombres rationnels et b n'étant pas un carré, trouver dans quels cas le nombre $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ est la somme de deux radicaux carrés portant sur des nombres rationnels, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$.

4° Extraire les racines carrées de $13+4\sqrt{3}$, de $27+10\sqrt{2}$, de $11+6\sqrt{2}$.

5° a, b et c étant des nombres rationnels non carrés parfaits, trouver les relations qui existent entre ces nombres si l'on a $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}$.

LIVRE V

RAPPORTS ET PROPORTIONS
RÈGLES DE TROIS, D'INTÉRÊT, ETC.

CHAPITRE PREMIER

RAPPORTS ET PROPORTIONS

158. Rapport. — On appelle *rapport* de deux longueurs OA et OB, ou de deux grandeurs de même espèce, mesurables, la mesure de la première obtenue en prenant la seconde pour unité.

Le théorème suivant est fondamental dans la théorie des rapports :

THÉORÈME. — *Le rapport de deux longueurs* OA *et* OB *est le quotient des nombres qui mesurent ces deux longueurs, lorsqu'on prend une unité quelconque.*

Soient, en effet, OA, OB et OC les deux longueurs données et l'unité choisie. Si nous supposons d'abord que les trois longueurs ont une commune mesure, contenue m fois dans OA, n fois dans OB et p fois dans OC, nous avons, d'après le n° 102,

$$\text{mes. de OA par rap. à OC} = \frac{m}{p};$$

$$\text{mes. de OB par rap. à OC} = \frac{n}{p};$$

$$\text{mes. de OA par rap. à OB} = \frac{m}{n};$$

or, le troisième nombre est égal au quotient des deux premiers ; donc le théorème est établi dans ce cas.

Supposons maintenant que OA, OB et OC n'aient pas de commune mesure, et prenons une partie aliquote quelconque de OC, contenue, par exemple, p fois dans OC ; soient alors $\frac{m}{p}$, $\frac{m+1}{p}$ les mesures approchées de OA, et $\frac{n}{p}$, $\frac{n+1}{p}$ celles de OB ; désignons par OA_1, OA_2, OB_1, OB_2 les longueurs correspondantes, par a et b les nombres qui mesurent les longueurs OA et OB, et par α le rapport de OA à OB. Nous avons alors

$$\frac{m}{p} < a < \frac{m+1}{p},$$

$$\frac{n}{p} < b < \frac{n+1}{p},$$

et $$\frac{p}{n+1} < \frac{1}{b} < \frac{p}{n}; \qquad \text{(n° 148)}$$

si nous multiplions, terme à terme, les inégalités de la première ligne par celles de la troisième, nous en déduisons (n° 151)

$$\frac{m}{n+1} < \frac{a}{b} < \frac{m+1}{n}.$$

Or $\frac{m}{n+1}$ est la mesure de OA_1, par rapport à l'unité OB_2, tandis que α est la mesure de OA par rapport à l'unité OB ; donc [n° 148] (*) $\frac{m}{n+1} < \alpha$; de même $\alpha < \frac{m+1}{n}$. Par conséquent, les deux nombres $\frac{a}{b}$ et α sont tous deux

(*) La mesure d'une longueur est diminuée, si on diminue la longueur à mesurer et si on augmente l'unité.

compris entre $\frac{m}{n+1}$ et $\frac{m+1}{n}$, et, pour montrer qu'ils sont égaux, il suffit d'établir que la différence $\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1}$ a pour limite 0, quand p augmente indéfiniment. A cet effet, remarquons que les entiers m et n augmentent aussi indéfiniment, quand p grandit indéfiniment; car, si l'un d'eux, n par exemple, restait fini, la longueur $\frac{n+1}{p}$ ou OB_2 finirait par être moindre que toute longueur donnée; or elle est plus grande que OB; il y aurait contradiction; donc les nombres m et n augmentent indéfiniment avec p.

Écrivons alors

$$\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1} = \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n} + \frac{m}{n} - \frac{m}{n+1}$$

ou
$$\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1} = \frac{1}{n} + \frac{m}{n+1} \cdot \frac{1}{n};$$

d'où $\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1} < \frac{1}{n} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n}$. $\left(\text{Car } \frac{a}{b} > \frac{m}{n+1}\right)$.

Sous cette forme, il est visible que $\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1}$ tend vers 0, lorsque p, et, par suite, n augmentent indéfiniment.

Ce théorème est d'un grand usage, en géométrie, pour la mesure des angles, des aires, des volumes, etc., et pour effectuer un changement d'unité.

Il nous montre aussi pourquoi on adopte pour le rapport la notation du quotient, et nous conduit à la définition suivante.

On appelle *rapport arithmétique* le quotient de deux nombres a et b; c'est le nombre $\frac{a}{b}$, qui est dit *rapport de* a

à b ; mais on lit ce nombre comme un quotient, et c'est sous ce nom qu'on le désigne le plus communément.

La *valeur* d'un rapport est donc le nombre rationnel ou irrationnel qui, multiplié par le second nombre, b, reproduit le premier, a. Si les nombres a et b sont rationnels, le quotient de a par b peut se mettre sous forme d'un nombre fractionnaire irréductible, $\frac{\alpha}{\beta}$; c'est ce nombre qui est la valeur du rapport. Si les deux nombres sont irrationnels, ou qu'un seul d'entre eux le soit, la valeur du rapport sera, en général, irrationnelle, et l'on ne pourra avoir que ses valeurs approchées.

Exemples: Le rapport $\frac{54}{120}$ a pour valeur $\frac{9}{20}$; le rapport $\frac{\frac{4}{6}}{\frac{5}{75}}$ a pour valeur 10; le rapport $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ a pour valeur $\sqrt{3}$; le rapport $\frac{19+8\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ a pour valeur $4+\sqrt{3}$.

Les deux nombres d'un rapport se nomment ses *termes;* le dividende s'appelle *antécédent*; le diviseur, *conséquent*.

159. Rapports égaux. — Calculs sur les rapports. — On appelle *rapports égaux* deux rapports qui ont la même valeur.

Deux rapports qui n'ont pas la même valeur sont dits *inégaux*; celui qui a la plus grande valeur est dit *plus grand* que l'autre.

On écrit donc suivant les cas $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, ou $\frac{a}{b}\neq\frac{a'}{b'}$ $\left(\frac{a}{b}\right.$ différent de $\left.\frac{a'}{b'}\right)$, ou $\frac{a}{b}>\frac{a'}{b'}$ ou $\frac{a}{b}<\frac{a'}{b'}$.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux rapports soient égaux, $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, *est que l'on ait* $ab'=ba'$.

La condition est nécessaire; car si l'on désigne par q la valeur de chacun des rapports, on a

$$a = bq, \qquad a' = b'q \qquad \text{ou} \qquad b'q = a',$$

et, en multipliant ces deux égalités membre à membre,

$$ab'q = a'bq;$$

il n'y a qu'à diviser les deux membres de cette égalité par le même nombre q pour avoir l'égalité annoncée.

La condition est suffisante; car si l'on a $ab' = ba'$, et que l'on pose $\frac{a}{b} = q$ ou $a = bq$, on en déduit $bb'q = ba'$; d'où, en divisant par b les deux membres de cette égalité, $a' = b'q$, $\frac{a'}{b'} = q$.

L'égalité $ab' = ba'$ donne naissance à quatre égalités distinctes :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \qquad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}, \qquad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b};$$

les deux dernières contiennent les inverses des nombres qui figurent dans les premières.

On n'altère pas la valeur d'un rapport en multipliant ses deux termes par un même nombre.

Car soit q la valeur d'un rapport $\frac{a}{b}$; on a $a = bq$, et, par suite, $a\alpha = b\alpha q$, quel que soit α; donc $\frac{a\alpha}{b\alpha} = q$.

On peut toujours réduire des rapports quelconques au même dénominateur.

En effet, choisissons un nombre quelconque N; il suffit de multiplier les deux termes de chacun des rapports $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots\ldots$ respectivement par $\frac{N}{b}, \frac{N}{b'}, \frac{N}{b''}, \ldots\ldots$, pour avoir partout le dénominateur N.

Dans la pratique, on multiplie d'abord les deux termes de chaque rapport par un nombre tel que ce rapport ait une représentation numérique aussi simple que possible. Alors

pour réduire plusieurs rapports au même dénominateur, on prend N égal au produit des dénominateurs, c'est-à-dire qu'on multiplie les deux termes de chaque rapport par le produit des dénominateurs de tous les autres.

Exemples. — Le rapport $\dfrac{\frac{15}{100}}{\frac{75}{30}}$ s'écrit d'abord $\dfrac{15 \times 30}{100 \times 75} = \dfrac{3}{10 \times 5} = \dfrac{3}{50}$; on a donc l'égalité

$$\frac{\frac{15}{100}}{\frac{75}{30}} = \frac{3}{50},$$

qui entraîne l'égalité

$$\frac{15}{100} \times 50 = \frac{75}{30} \times 3.$$

Considérons maintenant les trois rapports $\dfrac{\frac{15}{100}}{\frac{75}{30}}$, $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{8}}$, $\dfrac{8+2\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}$. Les deux premiers se réduisent facilement à $\dfrac{3}{50}$ et $\dfrac{16}{15}$; pour simplifier le dernier, on multiplie ses deux termes par $\sqrt{7}-1$, et l'on a $\dfrac{6\sqrt{7}+6}{6} = \sqrt{7}+1$. Les dénominateurs sont donc 50, 15 et 1; leur p. p. c. m. est 150, et les trois rapports, ramenés au dénominateur 150, sont

$$\frac{9}{150}, \quad \frac{160}{150} \quad \text{et} \quad \frac{150(1+\sqrt{7})}{150}.$$

On obtient la somme de plusieurs rapports ayant le même dénominateur, en formant un rapport ayant même dénominateur qu'eux et pour numérateur la somme des numérateurs.

Car soient $\frac{a_1}{b}$, $\frac{a_2}{b}$, ..., $\frac{a_n}{b}$ plusieurs rapports de même dénominateur b, et de valeurs q_1, q_2, ..., q_n; on a

$$a_1 = bq_1, \quad a_2 = bq_2, \quad \ldots\ldots, \quad a_n = bq_n;$$

et, en ajoutant membre à membre toutes ces égalités,

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n = b(q_1 + q_2 + \ldots\ldots + q_n).$$

Donc $\frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{b} = q_1 + q_2 + \ldots\ldots + q_n.$

Si $\frac{a_1}{b} > \frac{a_2}{b}$ ou $q_1 > q_2$, on a de même $\frac{a_1 - a_2}{b} = q_1 - q_2$. D'où :

On obtient la différence de deux rapports ayant le même dénominateur, en formant un rapport ayant même dénominateur qu'eux et pour numérateur la différence des deux numérateurs.

— *Pour avoir le produit de deux rapports, on divise le produit des numérateurs par celui des dénominateurs.*

Car soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ deux rapports de valeurs q et q'; on a $a = bq$, $a' = b'q'$; d'où, par multiplication, $aa' = bb'qq'$. Par conséquent, $\frac{aa'}{bb'} = qq'$, ce qui démontre la propriété annoncée.

On obtient le quotient de deux rapports, en multipliant le rapport dividende par le rapport diviseur renversé.

Car soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ deux rapports de valeurs q et q'; on a $a = bq$, $a' = b'q'$; d'où, par multiplication en croix, $ab'q' = a'bq$. On déduit de là $ab' = a'b \times \frac{q}{q'}$ (*); donc $\frac{ab'}{ba'} = \frac{q}{q'}$; ce qui démontre la proposition annoncée.

(*) De l'égalité $ab' = ba'\frac{q}{q'}$, on déduit $ab' = ba'$, si l'on pose $q = q'$, et $ab' > ba'$ ou $ab' < ba'$, si l'on pose $q > q'$ ou $q < q'$. Tout ceci peut se voir d'ailleurs immédiatement et autrement.

Le nombre $\frac{b}{a}$ est l'inverse de $\frac{a}{b}$. Ceci se voit d'ailleurs de suite puisque $\frac{b}{a}$ a pour valeur $\frac{1}{q}$, q étant la valeur de $\frac{a}{b}$.

160. Propriétés concernant les rapports égaux. — THÉORÈME. — *De toute suite de rapports arithmétiques égaux, on peut déduire un rapport égal à chacun d'eux, en prenant pour numérateur la somme des numérateurs et pour dénominateur la somme des dénominateurs.*

Désignons par $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, ..., $\frac{a_n}{b_n}$ une suite de rapports égaux, et par q la valeur de chacun d'eux ; nous aurons

$$a_1 = b_1 q, \qquad a_2 = b_2 q \ldots\ldots, \qquad a_n = b_n q,$$

et, en ajoutant toutes ces égalités, membre à membre,

$$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n = (b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n) q.$$

Nous voyons donc que le rapport

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n}$$

a pour valeur le nombre q.

Nous pouvons tout aussi bien retrancher certaines de ces égalités successivement de la somme des autres, pourvu que les soustractions puissent se faire, et nous aurons une égalité de la forme

$$a_{p_1} + a_{p_2} + \cdots\cdots + a_{p_k} - (a_{p_{k+1}} + a_{p_{k+2}} + \cdots\cdots + a_{p_n})$$
$$= [b_{p_1} + b_{p_2} + \cdots\cdots + b_{p_k} - (b_{p_{k+1}} + b_{p_{k+2}} + \cdots\cdots + b_{p_n})] q.$$

Le rapport

$$\frac{a_{p_1} + a_{p_2} + \cdots\cdots + a_{p_k} - (a_{p_{k+1}} + a_{p_{k+2}} + \cdots\cdots + a_{p_n})}{b_{p_1} + b_{p_2} + \cdots\cdots + b_{p_k} - (b_{p_{k+1}} + b_{p_{k+2}} + \cdots\cdots + b_{p_n})}$$

a donc aussi pour valeur le nombre q.

On déduit de là l'énoncé du théorème suivant, plus général que le premier :

THÉORÈME. — *De toute suite de rapports arithmétiques égaux, on déduit d'autres rapports égaux aux premiers, en prenant pour termes les sommes des termes correspondants de certains d'entre eux, ou bien les sommes des termes correspondants de certains d'entre eux, diminuées des sommes analogues formées avec d'autres rapports.*

Avant de faire subir à une suite de rapports égaux les opérations indiquées par le théorème précédent, on peut multiplier les termes de l'un quelconque d'entre eux par le même nombre, et faire subir une modification analogue à un nombre quelconque de ces rapports ; car en agissant ainsi on n'altère pas la valeur commune à tous les rapports donnés.

Nous pouvons donc énoncer maintenant le théorème suivant, qui comprend les deux précédents comme cas particuliers.

THÉORÈME. — *De toute suite de rapports arithmétiques égaux, on peut déduire d'autres rapports égaux aux précédents, en multipliant les deux termes de chacun d'eux par un nombre quelconque, et en formant avec les nouveaux rapports des combinaisons, terme à terme, par voie d'addition ou de soustraction, pourvu que les soustractions indiquées par les signes — soient possibles* (*).

Ainsi la suite d'égalités

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

(*) Le lecteur qui aura suivi la partie complémentaire de cet ouvrage, pourra introduire seul et sans peine des rapports algébriques, quotients de nombres positifs ou négatifs, et leur étendre, sans aucune restriction, les propriétés démontrées jusqu'ici.

entraîne

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots\cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\pm a_1\alpha_1 \pm a_2\alpha_2 \pm \cdots\cdots \pm a_n\alpha_n}{\pm b_1\alpha_1 \pm b_2\alpha_2 \pm \cdots\cdots \pm b_n\alpha_n},$$

les signes employés, haut et bas, étant à chaque fois identiques, et les signes — indiquant seulement qu'il faut soustraire de la somme des autres termes tous ceux qu'ils affectent.

Applications. — 1° *Trouver deux nombres* x *et* y *vérifiant les deux égalités*

$$2x - 3y = 0 \qquad \text{et} \qquad 5x + 7y = 11.$$

Si l'on admet que le problème soit possible, il est facile d'en avoir la solution ; car la première égalité peut s'écrire $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$, et, en multipliant les deux termes du premier rapport par 5, les deux termes du second par 7, et ajoutant terme à terme, on a le nouveau rapport $\frac{5x + 7y}{15 + 14}$, qui est égal aux deux précédents. Or $5x + 7y = 11$; donc on a la suite d'égalités $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{11}{29}$.

On déduit de là $x = \frac{33}{29}$, $y = \frac{22}{29}$, et il est facile de vérifier que ces nombres satisfont aux deux égalités imposées.

2° *Trouver deux nombres* x *et* y *vérifiant les deux égalités*

$$x + 2y = 11, \qquad 5x - 7y = 11.$$

Si l'on admet que le problème posé ait une solution, on peut traiter x et y comme deux nombres ordinaires vérifiant les deux égalités données ; et alors il n'y a qu'à retrancher la première égalité de la seconde pour obtenir de suite $4x - 9y = 0$, et être ramené au problème précédent.

On obtient ainsi la suite d'égalités :

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{4} = \frac{x+2y}{9+8} = \frac{11}{17};$$

d'où $$x = \frac{99}{17}, \qquad y = \frac{44}{17}.$$

Il est facile maintenant de vérifier que ces deux nombres conviennent.

Les propriétés suivantes se démontrent aussi aisément.

THÉORÈME. — *De toute suite de rapports égaux, on peut déduire d'autres rapports ayant la même valeur que ceux-ci, en élevant d'abord au carré tous ces rapports, les combinant terme à terme par voie d'addition ou de soustraction, après avoir multiplié les deux termes de chacun des nouveaux rapports par un même nombre, et enfin extrayant les racines carrées des deux termes du dernier rapport ainsi obtenu* (*).

Considérons une suite de rapports égaux

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{b_n},$$

et désignons par q la valeur de chacun d'eux ; nous aurons

$$a_1 = b_1 q, \quad a_2 = b_2 q, \quad \ldots\ldots, \quad a_n = b_n q.$$

Si nous élevons au carré les deux termes de chacune de ces égalités, nous obtiendrons les égalités nouvelles :

$$a_1^2 = b_1^2 q^2, \quad a_2^2 = b_2^2 q^2, \quad \ldots\ldots, \quad a_n^2 = b_n^2 q^2.$$

En multipliant les deux termes de la première par α_1, ceux de la seconde par α_2, ..., ceux de la n^e par α_n, nous aurons une nouvelle suite d'égalités

$$\alpha_1 a_1^2 = \alpha_1 b_1^2 . q^2, \quad \alpha_2 a_2^2 = \alpha_2 b_2^2 . q^2, \quad \ldots\ldots, \quad \alpha_n a_n^2 = \alpha_n b_n^2 . q^2 ;$$

d'où nous déduirons, par additions et soustractions succes-

(*) Il est bien entendu qu'il faudra procéder de façon à ne pas rencontrer d'opération impossible. Le théorème actuel peut être étendu : on peut élever d'abord tous les rapports à une même puissance, n, les combiner comme il est dit, puis extraire la racine n^e haut et bas.

sives,

$$(\pm\alpha_1 a_1^2 \pm \alpha_2 a_2^2 \pm \ldots\ldots \pm \alpha_n a_n^2) = (\pm\alpha_1 b_1^2 \pm \alpha_2 b_2^2 \pm \ldots\ldots \pm \alpha_n b_n^2) q^2,$$

et, par suite,

$$q^2 = \frac{\pm\alpha_1 a_1^2 \pm \alpha_2 a_2^2 \pm \ldots\ldots \pm \alpha_n a_n^2}{\pm\alpha_1 b_1^2 \pm \alpha_2 b_2^2 \pm \ldots\ldots \pm \alpha_n b_n^2};$$

et de là on tire

$$q = \frac{\sqrt{\pm\alpha_1 a_1^2 \pm \alpha_2 a_2^2 \pm \ldots\ldots \pm \alpha_n a_n^2}}{\sqrt{\pm\alpha_1 b_1^2 \pm \alpha_2 b_2^2 \pm \ldots\ldots \pm \alpha_n b_n^2}}.$$

Le théorème est donc établi.

On prend, à chaque fois, le même signe, haut et bas, et les signes doivent être entendus ainsi : tous les termes précédés du signe $+$, dans chaque terme, sont ajoutés les uns aux autres, et ceux qui sont précedés du signe $-$ sont retranchés successivement ou en une fois de cette somme.

Application. - *Trouver deux nombres vérifiant l'égalité* $2x - 3y = 0$ *et dont la somme des carrés soit égale à* 637.

Si le problème est possible, on a

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = z,$$

z étant un nombre inconnu actuellement.

On a donc $x = 3z$, $y = 2z$, et, par suite, $x^2 = 9z^2$, $y^2 = 4z^2$; d'où $x^2 + y^2 = 13z^2$; z est donc déterminé par l'égalité $13z^2 = 637$.

Les deux membres de cette égalité sont divisibles par 13 et l'on a $z^2 = 49$; d'où $z = 7$.

Par suite, $x = 21$, $y = 14$; et il est facile de vérifier que ces deux nombres remplissent toutes les conditions qui leur sont imposées.

161. — **Proportions. Moyennes.** — L'égalité de deux rapports constitue une *proportion*.

Ce qui caractérise une proportion,

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'},$$

c'est l'égalité $ab' = ba'$ (n° 159).

Les deux termes a et b' se nomment les *extrêmes* ; les deux termes b et a' sont les *moyens* ; a est le *premier antécédent*, a' le *second antécédent* ; b est le *premier conséquent*, b' le *second conséquent*.

Lorsque quatre nombres a, b, a', b' vérifient l'égalité $ab' = ba'$, on dit qu'ils sont *en proportion*.

Une proportion peut s'écrire de quatre façons différentes (n° 159) :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \qquad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}, \qquad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}.$$

Dans l'une quelconque de ces égalités on peut remplacer l'un des rapports par un autre obtenu en ajoutant terme à terme les deux rapports qui y figurent ou en les retranchant de la même façon.

La première donne donc

$$\frac{a}{b} = \frac{a+a'}{b+b'}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a-a'}{b-b'},$$

$$\text{ou} \qquad \frac{a'}{b'} = \frac{a+a'}{b+b'}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{a'}{b'} = \frac{a-a'}{b-b'},$$

en supposant $a > a'$.

La seconde donne

$$\frac{a}{a'} = \frac{a+b}{a'+b'}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{a'} = \frac{a-b}{a'-b'},$$

$$\text{ou} \qquad \frac{b}{b'} = \frac{a+b}{a'+b'}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{b}{b'} = \frac{a-b}{a'-b'},$$

en supposant encore $a > b$.

Les deux autres conduisent aux mêmes égalités, écrites d'une façon différente.

Si on envisage l'égalité

$$\frac{b}{b'} = \frac{a+b}{a'+b'}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{a+b}{b} = \frac{a'+b'}{b'},$$

on peut l'énoncer ainsi :

Dans toute proportion, la somme des deux premiers termes est au second, comme la somme des deux derniers est au dernier, etc.

Puisque $\frac{a}{b} = \frac{a+a'}{b+b'}$ et que $\frac{a}{b} = \frac{a-a'}{b-b'}$, on a aussi

$$\frac{a+a'}{b+b'} = \frac{a-a'}{b-b'},$$

ou

$$\frac{a+a'}{a-a'} = \frac{b+b'}{b-b'};$$

donc

Dans toute proportion, la somme des deux premiers termes est à leur différence, comme la somme des deux derniers est à leur différence, etc.

L'un quelconque des quatre nombres d'une proportion est dit *quatrième proportionnelle* entre les trois autres. Pour qu'une quatrième proportionnelle soit bien définie par les trois autres nombres, il faut donner l'ordre des nombres.

En désignant par x la quatrième proportionnelle aux trois nombres 12, 5, 4, et en se donnant l'ordre x, 12, 5, 4, on a

$$\frac{x}{12} = \frac{5}{4}; \qquad \text{d'où} \qquad 4x = 60, \qquad x = 15.$$

Si on se donne, au contraire, l'ordre 12, x, 5, 4, on a

$$\frac{12}{x} = \frac{5}{4}; \qquad \text{d'où} \qquad 5x = 48, \qquad x = \frac{48}{5}.$$

Si deux des trois nombres donnés sont égaux, le nombre inconnu s'appelle une *troisième proportionnelle* entre les trois nombres, pourvu toutefois que les deux nombres égaux soient tous deux moyens ou tous deux extrêmes.

Exemple : x, 2, 2, 5 ou 2, x, 5, 2.

On a $\frac{x}{2} = \frac{2}{5}$; d'où $x = \frac{4}{5}$.

On appelle *moyenne proportionnelle* entre deux nombres, un nombre qui forme les deux moyens ou les deux extrêmes

d'une proportion dont les deux nombres donnés sont les autres termes.

Si $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$ ou $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, x est moyenne proportionnelle entre a et b; on a donc $x^2 = ab$; d'où $x = \sqrt{ab}$.

La moyenne proportionnelle entre 2 et 18 est $x = \sqrt{2 \times 18}$ ou $x = 6$.

On appelle *moyenne arithmétique* entre deux nombres, a et b, leur demi-somme $\frac{a+b}{2}$. La moyenne proportionnelle s'appelle aussi *moyenne géométrique.*

La moyenne arithmétique entre deux nombres est toujours plus grande que la moyenne géométrique, sauf quand les deux nombres sont égaux.

Si a et b sont les deux nombres donnés, $\frac{a+b}{2}$ est plus grand que $\sqrt{ab}$, car les carrés de ces nombres sont $\frac{(a+b)^2}{4}$ et ab, et l'on a

$$(a+b)^2 > 4ab,$$

puisque $(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2$ ou $4ab + (b-a)^2$.
Si $a = b$, les deux moyennes sont égales à a.

On appelle *moyenne harmonique* entre deux nombres, a et b, un nombre tel que son inverse soit la moyenne arithmétique des inverses des deux autres.

Soit x cette moyenne; elle est définie par l'égalité

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{x} = \frac{a+b}{2ab};$$

on a donc $$x = \frac{2ab}{a+b} \frac{ab}{\frac{a+b}{2}}.$$

La moyenne harmonique est donc le quotient du carré de la moyenne géométrique par la moyenne arithmétique;

elle est plus petite, en général, que la moyenne géométrique.

Enfin on appelle parfois *moyenne* entre plusieurs nombres inégaux, un nombre compris entre le plus petit et le plus grand d'entre eux.

THÉORÈME. — *Si on considère plusieurs rapports inégaux, le rapport obtenu en les ajoutant terme à terme est compris entre le plus petit et le plus grand d'entre eux.*

En effet, considérons plusieurs rapports, $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, ..., $\frac{a_n}{b_n}$, qui ne soient pas tous égaux, et désignons par q la valeur du plus petit de ces rapports et par q' la valeur du plus grand; nous aurons $\frac{a_k}{b_k} \geqslant q$ et $\frac{a_k}{b_k} \leqslant q'$, et, en multipliant par b_k les deux membres de chacune de ces égalités,

$$a_k \geqslant b_k q \qquad \text{et} \qquad a_k \leqslant b_k q'.$$

Nous avons donc les relations suivantes, dans lesquelles quelques-unes sûrement sont des inégalités :

$$a_1 \geqslant b_1 q, \quad a_2 \geqslant b_2 q, \quad \ldots\ldots, \quad a_n \geqslant b_n q;$$

en ajoutant membre à membre toutes ces inégalités, nous aurons

$$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n > (b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n)q;$$

d'où
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n} > q.$$

Nous avons de même

$$a_1 \leqslant b_1 q', \quad a_2 \leqslant b_2 q', \quad \ldots\ldots, \quad a_n \leqslant b_n q';$$

d'où $\quad a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n < (b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n)q'$,

et, par suite,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n} < q'. \qquad (*)$$

Le théorème est donc établi par ces deux inégalités.

(*) Pour les propriétés relatives aux inégalités et invoquées ici, il suffit de se reporter à la division des nombres quelconques (n° 151).

EXERCICES

1° Si aux quatre termes d'une proportion on ajoute le même nombre, cette proportion est en général détruite. Dans quel cas subsiste-t-elle encore ?

2° Quel est le plus grand des deux rapports

$$\frac{a-b}{a+b} \quad \text{et} \quad \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} ?$$

3° Deux nombres quelconques sont les termes extrêmes d'une proportion dont leur moyenne arithmétique et leur moyenne harmonique sont les moyens.

4° Que faut-il pour qu'en ajoutant terme à terme deux proportions on obtienne une nouvelle proportion ?

5° Trouver deux nombres connaissant leur rapport et leur somme.

6° Trouver deux nombres connaissant leur rapport et leur différence, ou la somme de leurs carrés, ou la différence de leurs carrés.

7° Démontrer que le rapport de deux entiers ne contenant pas le chiffre 0, est compris entre les rapports des chiffres de même rang, au numérateur et au dénominateur. (On admettra que les deux termes ont le même nombre de chiffres, le numérateur pouvant contenir, lui, le chiffre 0.)

8° Si on forme une suite commençant par 2 et 1, puis les moyennes arithmétique et harmonique de ces nombres, a_1 et b_1, puis les moyennes arithmétique et harmonique de a_1 et b_1, et ainsi de suite, on aura toujours deux nombres qui comprennent entre eux $\sqrt{2}$. Généraliser. Déduire de là le moyen d'extraire une racine carrée avec une approximation donnée.

CHAPITRE II

GRANDEURS PROPORTIONNELLES RÈGLES DE TROIS, D'INTÉRÊT, D'ESCOMPTE, DE MÉLANGE, ETC.

162. Grandeurs proportionnelles. — Lorsque des grandeurs d'une espèce donnée sont mesurables, la théorie de leur mesure s'expose absolument comme celle de la mesure des longueurs. Par rapport à une grandeur unité choisie parmi elles, il y a des grandeurs commensurables et des grandeurs incommensurables ; les premières ont pour mesures des nombres entiers ou fractionnaires ; les autres, des nombres incommensurables. Quant aux conditions que doivent remplir des grandeurs d'une espèce déterminée pour être mesurables, il faut évidemment les chercher parmi les propriétés abstraites dont jouissent les longueurs ; mais il est difficile de les préciser d'une façon nette et exclusive.

Cette difficulté, purement théorique d'ailleurs, dans la plupart des cas, ne doit pas nous préoccuper ici : l'arithmétique ne s'occupe que de grandeurs mesurables, indépendamment de toute théorie sur la mesure des grandeurs, et envisage non pas la grandeur elle-même, mais le nombre qui la mesure. Quand la notion même de grandeur intervient, ce n'est qu'accidentellement pour établir entre divers nombres d'une question des relations qui permettront de la résoudre.

On dit que deux grandeurs, exprimées numériquement, sont *directement proportionnelles* ou *varient proportionnellement*, lorsque le rapport de deux valeurs quelconques de

la première est le même que celui des valeurs correspondantes de la seconde.

Exemples. — Le salaire d'un ouvrier est proportionnel aux heures de travail qu'il a faites. Le prix d'une étoffe est proportionnel à sa longueur, la largeur de l'étoffe restant d'ailleurs la même.

Si l'on désigne par x et y les valeurs variables des grandeurs que l'on compare et par $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ des valeurs particulières de la première, par $y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots$ les valeurs correspondantes de la seconde, on a

$$\frac{x_n}{x_1} = \frac{y_n}{y_1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_1}{y_1};$$

donc le rapport des valeurs correspondantes de deux grandeurs directement proportionnelles est constant, et réciproquement. Cette propriété eût pu être prise pour définition.

Lorsque deux grandeurs sont directement proportionnelles, si l'une d'elles devient 2, 3, 4, ... *fois plus grande ou plus petite, l'autre devient aussi* 2, 3, 4, ... *fois plus grande ou plus petite.*

Cela résulte évidemment de ce fait que le rapport $\frac{x}{y}$ reste constant.

Réciproquement, *si deux grandeurs variables et comparées l'une à l'autre sont telles que l'une devenant* 2, 3, 4, ... *fois plus petite ou plus grande, l'autre devienne aussi* 2, 3, 4, ... *fois plus petite ou plus grande, elles sont directement proportionnelles.*

En effet, soient a et b les deux valeurs initiales de ces grandeurs; supposons d'abord que la première devienne $\frac{p}{q}a$, p et q étant deux entiers; alors on peut penser que la première grandeur est devenue q fois plus petite, c'est-à-dire $\frac{a}{q}$, puis p fois plus grande, c'est-à-dire $\frac{pa}{q}$; d'après ce que nous

avons dit, la seconde grandeur est devenue d'abord $\frac{b}{q}$; puis $\frac{pb}{q}$; le rapport entre les nouvelles valeurs $\frac{pa}{q}$ et $\frac{pb}{q}$ est donc toujours égal à $\frac{a}{b}$.

Supposons maintenant que la nouvelle valeur, a', soit incommensurable avec l'ancienne, a, c'est-à-dire que l'on ait $a' = ah$, h étant un nombre irrationnel, et désignons par $\frac{m}{p}$ et $\frac{m+1}{p}$ deux valeurs approchées par défaut et par excès, et quelconques, de h. Quand la première grandeur devient $\frac{ma}{p}$ ou $\frac{(m+1)a}{p}$, la seconde devient $\frac{mb}{p}$ ou $\frac{(m+1)b}{p}$; donc le nombre, b', qui correspond à a', est compris entre $\frac{mb}{p}$ et $\frac{(m+1)b}{p}$, et si l'on pose $b' = h'b$, on voit que le nombre h' a aussi pour valeurs approchées $\frac{m}{p}$ et $\frac{m+1}{p}$. Or deux nombres qui ont toujours les mêmes valeurs approchées sont égaux; donc $h' = h$, et l'on a $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$.

Le dernier raisonnement que nous venons de faire suppose en outre, qu'indépendamment des hypothèses déjà faites, on puisse affirmer que les deux grandeurs croissent ou décroissent en même temps, dans tous les cas.

On dit que deux grandeurs exprimées numériquement sont *inversement proportionnelles*, ou *varient en raison inverse l'une de l'autre*, lorsque le rapport de deux valeurs quelconques de la première est inverse de celui des valeurs correspondantes de la seconde.

Exemples. — Le temps que l'eau qui s'écoule par plusieurs robinets égaux met à remplir un bassin est inversement proportionnel au nombre des robinets. Le nombre de mètres de toile que l'on peut fabriquer avec une quantité

donnée de fil, varie en raison inverse de la largeur assignée à l'étoffe.

Si l'on désigne par x et y les valeurs variables des grandeurs que l'on compare et par $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ des valeurs particulières de la première, par $y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots$ les valeurs correspondantes de la seconde, on a

$$\frac{x_n}{x_1} = \frac{y_1}{y_n} \qquad \text{ou} \qquad x_n y_n = x_1 y_1 ;$$

donc le produit des valeurs correspondantes de deux grandeurs inversement proportionnelles est constant, et réciproquement. Cette propriété eût pu servir de définition.

Lorsque deux grandeurs sont inversement proportionnelles, si l'une d'elles devient 2, 3, 4, ... *fois plus grande ou plus petite, l'autre devient* 2, 3, 4, ... *fois plus petite ou plus grande.*

Cela résulte évidemment de ce que le produit xy est constant.

Réciproquement, si deux grandeurs variables et comparées l'une à l'autre, sont telles que l'une devenant 2, 3, 4, ... *fois plus petite ou plus grande, l'autre devienne* 2, 3, 4, ... *fois plus grande ou plus petite, elles sont inversement proportionnelles.*

La démonstration se fait comme précédemment.

Lorsqu'on dit, en arithmétique, que deux grandeurs sont directement ou inversement proportionnelles, c'est une convention ou un fait expérimental que l'on exprime ou bien une vérité empruntée à une autre science : géométrie, physique, mécanique, astronomie, mais jamais on n'a à démontrer cette assertion.

Ainsi on démontre, en géométrie, que des droites parallèles interceptent sur les deux côtés d'un angle des longueurs proportionnelles. L'expérience, en physique, dé-

montre que les volumes occupés par une masse d'air donnée sont, toutes autres conditions restant les mêmes, en raison inverse des pressions qu'elle supporte. L'observation, en astronomie, a montré que les carrés des temps des révolutions des planètes autour du soleil sont entre eux comme les cubes des distances moyennes de ces astres au soleil (*); etc.

Il arrive souvent qu'une grandeur d'espèce donnée dépend de plusieurs autres grandeurs d'espèces différentes ; il y a alors intérêt à la comparer à chacune de celles-ci. Pour cela, on fait varier seulement l'une d'elles et on étudie les variations de la grandeur proposée. Nous nous placerons seulement dans le cas simple où les deux grandeurs variables sont proportionnelles, et nous démontrerons le théorème suivant :

Si une grandeur X *dépend de plusieurs autres grandeurs* Y, Z, T, *de telle sorte que toutes, sauf une, restant fixes, la grandeur* X *soit proportionnelle à celle qui varie, la valeur de* X *est proportionnelle au produit des valeurs de* Y, Z, T.

Soient, en effet, x et x' deux valeurs de X qui répondent aux valeurs y, z, t et y', z', t' des grandeurs Y, Z, T; appelons x_1 et x_2 les valeurs de X qui répondent à y', z, t, et y', z', t. Pour passer de x à x_1, deux des valeurs relatives aux autres grandeurs restent fixes; donc $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y'}$; de même $\frac{x_1}{x_2} = \frac{z}{z'}$ et $\frac{x_2}{x'} = \frac{t}{t'}$. En multipliant membre à membre ces trois égalités et simplifiant le premier produit, on a $\frac{x}{x'} = \frac{yzt}{y'z't'}$. Le théorème est donc établi.

On démontrera de même que si X varie proportionnellement à Y et Z et en raison inverse de T, le nombre x varie proportionnellement à $\frac{yz}{t}$.

(*) Cet énoncé n'est pas tout à fait exact : le véritable énoncé exige pour être compris des notions assez étendues en géométrie.

163. Règle de trois simple. — Le problème général de la règle de trois simple peut s'énoncer ainsi :

Étant données deux grandeurs directement ou inversement proportionnelles et deux valeurs correspondantes de ces grandeurs, trouver la valeur de l'une d'elles qui correspond à une valeur donnée quelconque de l'autre.

Soient a et b les valeurs correspondantes données des deux grandeurs A et B, et b' une autre valeur de B; la valeur de A qui lui correspond, x, est donnée par l'une ou l'autre des proportions

$$\frac{x}{a} = \frac{b'}{b} \qquad \text{ou} \qquad \frac{x}{a} = \frac{b}{b'},$$

suivant que A et B sont directement ou inversement proportionnelles. On voit donc que x se calcule comme une quatrième proportionnelle et que l'on a

$$x = \frac{ab'}{b}, \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{ab}{b'}.$$

L'inconvénient de cette méthode, pour les commençants, est son abstraction même et aussi la précision qu'il faut apporter au classement des quatre nombres devant former la proportion dont on a besoin. Il existe une autre méthode, dite *de réduction à l'unité*, qui est préférable pour les débutants et que nous exposerons sur les exemples suivants.

Exemple de règle de trois simple et directe. — *Un fût de* 228[l] (*) *de vin coûte* 136[f],80; *combien coûtera un fût de* 721[l], *les prix des fûts et autres frais étant mis à part?*

Nous admettons, bien entendu, qu'il s'agit du même vin dans les deux cas :

1re *Méthode.* — Le prix d'une quantité variable de ce vin est évidemment proportionnel au volume (**), c'est-à-dire

(*) 228[l], abréviation de 228 litres; 136[f],80, abréviation de 136 francs 80 centimes ou centièmes de franc.

(**) C'est une convention commerciale.

au nombre de litres qu'il contient. Si donc nous désignons par x le prix de 721 litres, nous dirons : x est à 721, comme 136,80 est à 228, ou $\frac{x}{721} = \frac{136,80}{228}$; donc $x = \frac{136,80}{228} \times 721 = 432^f,6$.

2e *Méthode.* — Dans cette méthode, on commence par chercher le prix du litre, et l'on raisonne ainsi : puisque 228^l coûtent $136^f,80$, un litre coûte 228 fois moins ou $\frac{136,80}{228}$, et 721^l coûtent 721 fois le prix du litre, c'est-à-dire $\frac{136,80}{228} \times 721 = 432^f,6$.

Exemple de règle de trois simple et inverse. — *Une personne achète 228^l de vin à $0^f,65$ le litre. Combien aura-t-elle de litres de vin à $0^f,75$ le litre, pour le même prix?*

1re *Méthode.* — Le nombre de litres de vin que l'on a pour un prix déterminé est inversement proportionnel au prix du litre. Si donc on appelle x le nombre de litres du nouveau vin, on a $\frac{x}{228} = \frac{0,65}{0,75}$; d'où

$$x = 228 \times \frac{0,65}{0,75} = 228 \times \frac{65}{75} = 228 \times \frac{13}{15} = 197^l,6.$$

2e *Méthode.* — Puisque pour une somme donnée on a 228^l de vin à 65 centimes le litre, pour la même somme on aurait 65 fois plus de vin à un centime le litre, ou 228×65, et l'on aura 75 fois moins de vin à 75 centimes le litre, c'est-à-dire $\frac{228 \times 65}{75} = 197^l,6$.

Nous ne donnons pas de règle : il est préférable de recommencer sommairement le même raisonnement dans chaque cas particulier.

164. **Règle de trois composée.** — Le problème général de la règle de trois composée peut s'énoncer ainsi :

Étant données plusieurs grandeurs variables X, Y, Z, T, ..., *et telles que la première soit proportionnelle aux autres, dans le sens qui a été défini au n° 162, si l'on connaît la valeur de* X *qui répond à des valeurs déterminées de* Y, Z, T, ..., *trouver la valeur de* X *qui répond à d'autres valeurs données de* Y, Z, T, ...

Soient a la valeur de X qui répond à des valeurs données, b, c, d, ... de Y, Z, T, ..., et x la valeur inconnue de X qui répond à d'autres valeurs b', c', d', ..., connues et données aussi de Y, Z, T, ...; si X est directement proportionnelle à toutes les grandeurs Y, Z, T, ..., on a $x = a\frac{b'c'd'}{bcd}$; si X est directement proportionnelle à Y et Z et inversement proportionnelle à T, on a $x = a\frac{b'c'd}{bcd'}$; et ainsi de suite (voir le dernier théorème du n° 162).

Règle. — *Pour obtenir la nouvelle valeur de la grandeur étudiée* X, *on multiplie son ancienne valeur par le produit des rapports des deux valeurs de chacune des grandeurs dont elle dépend : on prend le rapport de la nouvelle valeur à l'ancienne, si la grandeur* X *est directement proportionnelle à celle que l'on envisage ; et le rapport de l'ancienne valeur à la nouvelle, si la grandeur* X *est inversement proportionnelle à celle que l'on envisage.*

1er Exemple. — *Une pièce d'étoffe de* 103m *de long et de* 0m,95 *de large coûte* 1147f ; *combien coûtera une autre pièce de la même étoffe de* 92m *de long et de* 1m,20 *de large ?*

Le prix d'une étoffe donnée est directement proportionnel à sa longueur et à sa largeur (*); le prix demandé est donc donné par la formule

$$x = 1147 \times \frac{92}{103} \times \frac{120}{95} = 1289^f.$$

(*) Convention commerciale.

La méthode de réduction à l'unité est encore applicable, et l'on dit : 103^m d'étoffe à 95^{cm} de largeur coûtent 1147, donc 103^m d'étoffe à 1^{cm} de largeur coûteraient 95 fois moins, ou $\frac{1147}{95}$, et un mètre à 1^{cm} de largeur coûterait 103 fois moins encore ou $\frac{1147}{95 \times 103}$; un mètre à 120^{cm} de largeur coûtera 120 fois plus ou $\frac{1147 \times 120}{95 \times 103}$, et 92 mètres à 120^{cm} de largeur coûteront $\frac{1147 \times 120 \times 92}{95 \times 103} = 1289^f$.

2e Exemple. — *Pour faucher* 1500 *hectares de pré, il faut employer pendant* 15 *jours*, 312 *ouvriers travaillant* 12^h *par jour. Combien faudra-t-il d'ouvriers pour faucher* 825 *hectares de pré, pendant* 13 *jours, chacun d'eux travaillant* 9^h *par jour?*

Le nombre des ouvriers employés est directement proportionnel au nombre des hectares, et inversement proportionnel au temps, c'est-à-dire aux nombres d'heures de travail et de jours. On a donc, d'après la règle,

$$x = 312 \cdot \frac{825}{1500} \cdot \frac{12}{9} \cdot \frac{15}{13} = 264.$$

On peut d'ailleurs raisonner ainsi : pour faucher 1500 hectares il faut 312 ouvriers travaillant 12^h par jour, pendant 15 jours, c'est-à-dire travaillant 12×15 heures en tout; pour faire le même travail en une heure, il faut $312 \times 12 \times 15$ ouvriers, et pour le faire en 13 jours de 9^h, c'est-à-dire en 13×9 heures, il faudra $\frac{312 \times 12 \times 15}{13 \times 9}$ ouvriers.

Une règle de trois simple et directe donne maintenant le nombre d'ouvriers nécessaires pour 825 hectares.

165. Règles d'intérêt. — L'*intérêt* d'une somme d'argent est le loyer de ce capital : c'est l'indemnité qu'exige le prê-

teur pour les services que cette somme d'argent est appelée à rendre à l'emprunteur.

L'intérêt est proportionnel au capital et au temps pendant lequel le capital est engagé. Ce sont là deux conventions universellement admises. L'intérêt se paie annuellement, ou par semestre, ou par trimestre.

On appelle *taux* l'intérêt produit par 100f pendant un an.

Dans les calculs relatifs à l'intérêt, le mois est supposé de 30 jours et l'année de 360 jours.

Si l'on désigne par t le taux; par C le capital exprimé en centaines de francs et en parties décimales de cette unité, par T le temps exprimé en années et parties décimales d'année, l'intérêt i produit par le capital donné a pour valeur $i = C.t.T$.

En effet, puisque une centaine de francs produit t francs dans un an, C centaines produiront C fois plus ou $C \times t$, et pendant T années, T fois plus encore, c'est-à-dire $C.t.T$.

Si l'on prend pour unité de capital le franc, et pour unité de temps le jour, on a $C = \frac{S}{100}$, S étant la somme prêtée, et $T = \frac{N}{360}$, N désignant le nombre de jours, évalué à raison de 360 par an et de 30 par mois. Alors

$$i = t \frac{N}{360} \frac{S}{100}.$$

De là on peut déduire n'importe lequel des trois nombres i, t, C, T ou i, t, S, N, connaissant les trois autres.

Nous allons d'ailleurs traiter directement sur des exemples toutes les questions auxquelles donne lieu le problème général de l'intérêt.

1er Problème. — *Trouver l'intérêt produit par une somme de* 95600f, *au taux de* 3f,20, *pendant* 7 *ans* 3 *mois* 22 *jours.*

Le nombre de jours est conventionnellement de

$$7 \times 360 + 3 \times 30 + 22 = 2632.$$

Or pendant un an 100^f rapportent $3^f,20$; donc pendant un an 1^f rapporte $\frac{3,20}{100}$ ou $0^f,032$, et 95600^f rapportent $0,032 \times 95600$.

Pendant un jour cette somme rapporterait 360 fois moins, et pendant 2632 jours elle rapporte 2632 fois plus. On a donc

$$i = \frac{0,032 \times 95600}{360} \times 2632 = 22366^f,15.$$

2e Problème. — *A quel taux faut-il placer une somme de 12000^f pour qu'elle produise 1250^f en 2 ans 3 mois ?*

Dans deux ans et trois mois, il y a 27 mois. Or 12000^f rapportent 1250^f en 27 mois ; ils rapportent donc $\frac{1250}{27}$ en un mois, et 1 franc rapporte 12000 fois moins ou $\frac{1250}{27 \times 12000} = \frac{125}{27 \times 1200}$; par conséquent, 100^f rapportent en un mois 100 fois cette somme ou $\frac{125 \times 100}{27 \times 1200} = \frac{125}{27 \times 12}$, et en 12 mois, 12 fois plus ou $\frac{125}{27}$. Le taux est donc $t = \frac{125}{27} = 4^f,63$.

3e Problème. — *Quelle somme faut-il placer, au taux de $3^f,75$, pour avoir 1145^f d'intérêt en 2 ans 5 mois ?*

Dans 2 ans et 5 mois, il y a 29 mois.

Pour produire $3^f,75$ d'intérêt en 12 mois, il faut 100^f, donc pour produire 1^f, il faudra un capital de $\frac{100}{3,75}$; en un mois, il faudra un capital 12 fois plus fort, et, en 29 mois, 29 fois plus faible que celui-ci. Donc le capital qui produit 1^f en 29 mois est $\frac{12 \times 100}{3,75 \times 29}$, et celui qui produit 1145^f est 1145 fois plus fort. On a donc

$$C = \frac{100 \times 12 \times 1145}{3,75 \times 29} = 12634^f,\ldots$$

4° Problème. — *Pendant combien de temps faut-il placer 12500f, à 4 pour 100, pour avoir 1345f d'intérêts ?*

Pendant un an ou 360 jours, 12500f rapportent $\frac{12500 \times 4}{100}$ ou $125 \times 4 = 500^f$. Donc puisque 500f sont obtenus en 360 jours, 1f sera obtenu en 500 fois moins de temps, et 1345f en 1345 fois plus de temps. Le nombre de jours cherché est donc

$$N = \frac{360}{500} \times 1345 = \frac{36}{50} \times 1345 = 968^j.$$

Le temps demandé est donc 968 jours ou 2 ans 8 mois 8 jours.

— Il arrive parfois que par suite d'une convention spéciale, non seulement l'emprunteur ne rembourse aucune partie du capital pendant les premières années, mais encore ne paie pas les intérêts ; alors ceux-ci sont regardés comme un nouveau capital prêté dans les mêmes conditions que l'ancien, et qui s'ajoute chaque année à ce capital, pour porter intérêt pendant les années suivantes. On dit alors que ce capital est placé à *intérêts composés.*

Exemple. — 12000f placés à intérêts composés et à 5 pour 100 l'an, rapportent 600f la première année; le capital prêté est donc 12600f, à la fin de la première année. Il rapporte 630f la seconde année, de sorte que le capital prêté est 13230f à la fin de la seconde année. Et ainsi de suite.

Pour traiter toutes les questions se rapportant aux intérêts composés, il faut connaître d'autres moyens de calcul que ceux que nous connaissons actuellement.

166. Rentes sur l'État. — Lorsque l'État contracte des emprunts, il reconnaît sa dette en délivrant à chacun de ses prêteurs une feuille de papier estampillée et numérotée énonçant le montant de l'intérêt annuel auquel aura droit le possesseur de cette feuille, appelée *titre* ou *inscrip-*

tion (*) *de rente*. Ces titres sont négociables par l'intermédiaire des agents de change.

L'État fait un emprunt en rente dite *perpétuelle*, quand il s'engage à payer, à des échéances déterminées, l'intérêt annuel consenti sur le capital emprunté, sans prendre d'engagement quant à une date de remboursement du capital. Cette date peut dès lors être reculée indéfiniment, d'où le nom de *rente perpétuelle*.

Au contraire, quand l'État fait un emprunt dit *amortissable*, non seulement il s'engage à payer, à des époques déterminées, l'intérêt simple du capital emprunté, comme dans le cas précédent, mais de plus il s'engage à rembourser le capital dans des conditions et dans une période déterminées.

Conversions. — Quand l'État juge qu'il pourrait diminuer le taux de l'intérêt qu'il paye aux rentiers sans que ceux-ci lui retirent leur confiance, et que ses engagements antérieurs ne lui interdisent pas l'opération, il *convertit* une certaine catégorie de rentes : à cet effet, il offre aux rentiers de leur rembourser le montant de leur capital prêté à sa valeur nominale, ou d'accepter en échange de leurs titres de nouveaux titres rapportant un intérêt diminué. Chaque conversion présente en outre certaines conditions particulières. C'est ainsi que, en vertu de la loi du 9 juillet 1902, le 3 ½ °/₀ perpétuel a été converti en 3 °/₀, désormais non convertissable jusqu'en 1911.

Fonds d'État français. — Les rentes françaises se divisent actuellement en deux grands types : le 3 pour 100 perpétuel et le 3 pour 100 amortissable.

Négociation des titres de rente. — Les prêteurs peuvent d'ailleurs négocier entre eux leurs titres de rente, par l'in-

(*) Parce qu'ils sont inscrits sur une série de registres dont l'ensemble constitue le *Grand-Livre de la Dette publique*. Ils y sont inscrits simplement avec un numéro d'ordre si le titre est *au porteur*, et avec, en plus, le nom du rentier possesseur actuel du titre si le titre est *nominatif*.

termédiaire des *agents de change*, qui perçoivent à ce sujet une commission appelée *courtage*. Le courtage est fixé à 1^f pour 1000^f de valeur négociée. Le prix de la rente est variable : il est soumis aux lois de l'*offre* et de la *demande*. Chaque jour, ce prix est débattu à la Bourse par les agents de change, et il y a un prix moyen qui est fixé. Le prix d'un titre de rente se nomme le *cours de la rente*.

Si le cours de la rente atteint 100^f, on dit que la rente est *au pair*. Le 3 pour 100 perpétuel a atteint le pair, pour la première fois, en juin 1892. Si le cours de la rente est inférieur ou supérieur à 100^f, on dit que la rente est au-dessus ou au-dessous du pair.

Le *cours d'émission* est le prix demandé par l'État, au moment de l'emprunt, pour un titre de rente.

1er Problème. — *Le cours de la rente 3 pour 100 étant* $96^f,75$, *trouver le taux d'un placement fait en 3 pour 100.*

3 francs d'intérêt sont donnés par $96^f,75$ plus le $\frac{1}{1000}$ de cette somme pour courtage ou 0,0968 ; donc ils coûtent $96^f,85$. Par conséquent 1^f rapporte $\frac{3}{96,85}$ et 100 rapportent $\frac{300}{96,85} = 3^f,099$.

Tel est le taux d'un pareil placement.

2e Problème. — *Le cours de la rente 3 pour 100 étant* $97^f,23$, *quelle somme faut-il verser pour avoir* 612^f *de rente ?*

Pour avoir 3^f de rente, il faut verser

$$97^f,23 + 0,097 = 97^f,33 ;$$

donc pour avoir 612^f de rente, c'est-à-dire $\frac{612}{3} = 204$ titres de rente, il faudra verser 204 fois $97^f,33$ ou $19855^f,32$.

3e Problème. — *Le cours de la rente 3 pour 100 amortissable étant* $98^f,12$, *combien aura-t-on de rente pour* $68950^f,44$? *Quel capital touchera-t-on si on est remboursé ?*

Le prix de 3^f de rente est en réalité de $98^f,22$; on aura donc autant de fois 3^f de rente, que le nombre $68950^f,44$

contient de fois le nombre 98,22, c'est-à-dire 702 fois. On peut donc acheter 2106f de rente avec cette somme.

Puisque chaque titre est remboursé à 100f, l'acheteur touchera 702×100 ou 70200f.

Remarque. — Tous les problèmes que nous venons de traiter sur l'intérêt et les rentes sur l'État ne sont pas autre chose que des applications de la règle de trois.

167. **Règles d'escompte.** — L'escompte a pour but de permettre aux commerçants d'utiliser des capitaux immobilisés pendant un certain temps. Un exemple fera aisément comprendre le but de l'escompte et sa nature : une personne achète à un commerçant pour 650f de marchandises payables dans 16 mois ; le commerçant, qui a besoin d'argent, tire une *traite* sur le vendeur, qui s'est engagé à payer la somme de 650f, dans 16 mois, sur la présentation de cette traite ; il inscrit la somme à payer sur cette traite et porte ce billet chez son banquier ; celui-ci avance au commerçant la somme marquée sur le titre qu'il lui présente, moins les intérêts de cette somme jusqu'au jour de l'échéance. C'est cette opération qui porte le nom d'*escompte*.

La somme inscrite sur un billet est sa *valeur nominale*.

La somme que le banquier peut donner en échange est sa *valeur actuelle*.

Le *taux de l'escompte* est l'intérêt attribué à 100f pendant un an. L'*escompte* est la retenue faite par le banquier sur le montant du billet.

1er Problème.— *Trouver la somme remise par un banquier sur un billet de valeur nominale de* 650f, *payable dans* 16 *mois, le taux de l'escompte étant* 6 *pour* 100.

Il suffit de calculer les intérêts de 650f pendant 16 mois, c'est-à-dire pendant $\frac{16}{12}$ ou $\frac{4}{3}$ d'année, à 6 pour 100. Ces intérêts sont donnés par la formule

$$i = CtT, \qquad (\text{n° } 165)$$

qui, dans le cas actuel, est

$$i = 6{,}50 \times 6 \times \frac{4}{3} = 6{,}50 \times 8 = 52^f.$$

Le banquier remet donc $650 - 52 = 598^f$ au commerçant.

Cette manière de calculer l'escompte n'est pas juste en théorie, car le banquier retient les intérêts d'une somme qu'il n'a pas déboursée. Il devrait donner en réalité une somme telle qu'en l'ajoutant à ses intérêts, elle reproduisit la somme proposée.

Le premier escompte, qui est le plus simple et le plus fréquent, s'appelle *escompte commercial* ou *en dehors* ; le second est l'escompte rationnel ou *escompte en dedans*.

Proposons-nous de traiter le problème précédent avec ce nouveau mode d'escompte. Nous chercherons d'abord la valeur actuelle de un franc payable dans 16 mois, l'escompte étant de 6 pour 100. Pour cela nous remarquons que 100^f vaudront à ce moment-là, 100^f plus les intérêts à 6 pour 100, c'est-à-dire $100 + 6 \times \frac{4}{3} = 108^f$. Donc 108^f payables dans 16 mois ont pour valeur actuelle 100^f; par conséquent 1^f vaut $\frac{100}{108}$, et 650^f valent $\frac{65000}{108} = 601^f{,}85$.

On peut encore raisonner ainsi : soit x la valeur actuelle du billet escompté ; les intérêts de ce capital pendant 16 mois sont $\frac{x \times 6 \times 4}{100 \times 3} = \frac{2x}{25}$; si on ajoute cette somme à x, on doit retrouver 650 ; on a donc $\frac{2x}{25} + x = 650$, ou $\frac{27x}{25} = 650$.

Par suite $$x = \frac{650 \times 25}{27} = 601^f{,}85.$$

Cette façon de procéder économise donc $3^f{,}85$ au commerçant.

2e Problème. — *A quel taux a été escompté un billet de 5500f, payable dans huit mois, sachant que le porteur du billet a touché 5390f ?*

Le banquier a retenu $5500 - 5390 = 110^f$. Nous voyons donc que 5500^f pendant 8 mois ont produit 110 d'intérêt ; donc 100^f produiront dans le même temps, $\frac{110}{5500} \times 100$, et, pendant 12 mois, $\frac{110 \times 100}{5500} \times \frac{12}{8} = 3^f$.

Le taux de cet escompte, supposé fait en dehors, est donc 3 pour 100.

S'il s'agit d'escompter en dedans, il faut regarder 110 comme ayant été produits, dans huit mois, par 5390^f. Le taux est donc $\frac{110 \times 100}{5390} \times \frac{12}{8}$ ou $\frac{1100}{539} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1650}{539} = 3^f,06$.

3e Problème. — *Un commerçant fait escompter à 4 pour 100, un billet payable dans un an et reçoit 5280f. Quelle était la valeur nominale du billet ?*

Dans un an 100^f vaudront 104^f, et 1^f vaudra $\frac{104}{100}$ ou 1,04; donc 5280^f vaudront $5280 \times 1^f,04$. Mais nous supposons ainsi que c'est la valeur actuelle qui porte intérêt ; nous supposons donc l'escompte en dedans. Dans ce cas, le billet a pour valeur nominale $5280 \times 1,04 = 5491^f,12$.

Si nous supposons l'escompte en dehors, il faut dire au contraire qu'une valeur nominale de 100^f a pour valeur actuelle $100 - 4 = 96$. Donc 96^f vaudront 100^f dans un an, et 5280 vaudront $\frac{5280 \times 100}{96}$ ou 5500^f.

4e Problème. — *Au bout de combien de temps était payable un billet de 5500f, pour lequel on a reçu 5280f, le taux de l'escompte étant 4 pour 100 ?*

L'intérêt produit est $5500 - 5280$ ou 220^f. Cet intérêt a été produit par 5500, si l'escompte a été fait en dehors. Il n'y a qu'à comparer cet intérêt à celui produit par 5500^f,

dans les mêmes conditions, pendant un an, pour avoir le temps que l'on cherche. Or 5500 à 4 pour 100 rapportent 220f en un an ; donc le billet était payable dans un an.

Si nous supposons, au contraire, l'escompte en dedans, les 220f ont été produits par 5280f. Or l'intérêt de 5280f, à 4 pour 100, pendant un an, est 211f,2 ; le billet était donc payable au bout de $\frac{220}{211,2}$ ou $\frac{2200}{2112}$ d'année ou 375 jours.

On peut mettre en formules tous les calculs précédents. Désignons par V la valeur nominale d'un billet, par V′ sa valeur actuelle, par α ce que rapporte un franc dans un an, par t le temps évalué en années et fractions décimales d'année, et enfin par E l'escompte en dehors et E′ l'escompte en dedans. Nous aurons $E = V\alpha t$ ou $E' = V'\alpha t$; d'autre part $V' + E = V$ ou $V' + E' = V$.

Les formules relatives à l'escompte en dehors sont donc

$$V' = V(1 - \alpha t) \quad \text{et} \quad E = V\alpha t\,;$$

les formules relatives à l'escompte en dedans sont

$$V' = \frac{V}{1 + \alpha t} \qquad \text{et} \qquad E' = \frac{V\alpha t}{1 + \alpha t}.$$

La différence entre les deux escomptes est

$$E - E' = \frac{V\alpha t}{1 + \alpha t} \times \alpha t.$$

C'est donc l'*intérêt produit par l'escompte en dedans*.

Connaissant trois des nombres V, V′, α, t, il est facile dans chaque cas d'avoir le quatrième. Le lecteur pourra se donner lui-même de nombreux exercices sur ce sujet.

168. **Règles de société.** — Lorsque plusieurs personnes se réunissent pour constituer le capital nécessaire à une entreprise, elles forment une *société* ou un être collectif jouissant des prérogatives commerciales attachées aux personnes. La portion du *capital social* apportée par l'un des sociétaires se nomme sa *mise*.

Nous n'avons à nous occuper ici que des calculs afférents à la répartition des bénéfices ou des pertes entre les divers membres de la société.

Pour faire ces calculs, on admet que les parts des sociétaires sont proportionnelles aux mises et aux temps pendant lesquels ces mises ont été employées dans le fonds social, c'est-à-dire proportionnelles aux produits des mises par les temps. (N° 162.)

Nous sommes donc amené à résoudre le problème suivant :

Partager un nombre donné, A, *en parties proportionnelles à des nombres donnés*, a, b, c.

Désignons par x, y, z les trois parties du nombre A; nous aurons, par hypothèse,

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \qquad \text{et} \qquad x + y + z = \mathrm{A};$$

or si nous ajoutons les trois rapports égaux terme à terme nous obtenons un rapport égal à chacun d'eux,

$$\frac{x + y + z}{a + b + c} = \frac{\mathrm{A}}{a + b + c};$$

donc nous avons la suite d'égalités

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{\mathrm{A}}{a + b + c},$$

et, en égalant chaque rapport au dernier, nous obtenons les valeurs de x, y, z,

$$x = \frac{\mathrm{A}a}{a + b + c}, \qquad y = \frac{\mathrm{A}b}{a + b + c}, \qquad z = \frac{\mathrm{A}c}{a + b + c}.$$

Rien n'est plus simple alors que de résoudre les diverses questions que soulève l'existence d'une société : nous allons les traiter sur des exemples particuliers.

1er Problème. — *Trois associés ont mis dans une affaire,*

pendant un certain temps, 1500^f, 2700^f, 4200^f, *et ont à se partager* 588^f *de bénéfices. Quelles seront les parts de chacun d'eux ?*

Les mises des trois associés ayant été employées pendant le même temps, les bénéfices sont proportionnels aux mises. Si donc on désigne par x, y, z les bénéfices qu'ils ont réalisés, on a

$$\frac{x}{1500} = \frac{y}{2700} = \frac{z}{4200} = \frac{x+y+z}{1500+2700+4200} = \frac{588}{8400}.$$

En multipliant par 100 chacun des rapports, on a

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{27} = \frac{z}{42} = \frac{588}{84} = 7;$$

on déduit de là, sans peine,

$$x = 15 \times 7 = 105\ ;\quad y = 27 \times 7 = 189\ ;\quad z = 42 \times 7 = 294.$$

Les bénéfices respectifs des trois associés sont donc 105^f, 189^f et 294^f.

2e Problème. — *Trois associés ont consacré à une affaire chacun la même somme, l'un pendant* 1 *an ; l'autre, pendant* 3 *ans, et le dernier, pendant* 4 *ans. Ils ont subi* 4000^f *de perte. Quelle est la perte de chacun d'eux?*

Les mises sont les mêmes ; donc les pertes sont proportionnelles aux temps pendant lesquels les mises ont été employées. Si donc on désigne par x, y, z les parts de chacun d'eux dans la perte subie, on a

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{8} = \frac{4000}{8} = 500^f.$$

Le premier a donc perdu 500^f; le second, 1500^f, et le troisième, 2000^f.

3e Problème. — *Quatre associés ont mis dans une affaire : le premier,* 500^f, *pendant* 4 *ans ; le second,* 3500^f, *pendant* 2 *ans ; le troisième,* 1500^f, *pendant* 7 *ans, et le quatrième,*

2000f, *pendant* 3 *ans. Ils ont gagné* 1275f. *Quelle est la part de chacun d'eux dans ce bénéfice ?*

Les bénéfices sont proportionnels aux produits des mises par les temps, c'est-à-dire proportionnels aux nombres $500 \times 4 = 2000$, $3500 \times 2 = 7000$, $1500 \times 7 = 10500$, $2000 \times 3 = 6000$. En désignant par x, y, z, t ces bénéfices, on a donc

$$\frac{x}{2000} = \frac{y}{7000} = \frac{z}{10500} = \frac{t}{6000} = \frac{x+y+z+t}{25500} = \frac{1275}{25500}.$$

Multipliant tous ces rapports égaux par 100, on a la nouvelle suite d'égalités

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{70} = \frac{z}{105} = \frac{t}{60} = \frac{1275}{255} = 5;$$

les parts respectives des quatre associés sont donc 100f, 350f, 525f, 300f.

Remarque. — Dans chaque cas, il y a une vérification : la somme des parts des divers associés doit être égale au bénéfice ou à la perte totale.

169. **Règles d'alliage.** — Un *alliage* est à la fois un mélange et une combinaison de plusieurs métaux qui sont, en général, fondus ensemble dans des proportions déterminées.

Nous ne parlerons ici que des alliages dans lesquels entre un métal précieux, or ou argent. (Voir *système métrique*, au paragraphe *monnaies*.)

On appelle *titre* d'un alliage le rapport du poids du métal précieux contenu dans une quantité déterminée de cet alliage, au poids total de la portion considérée.

Dans un alliage on néglige ordinairement la valeur du métal vulgaire et on ne s'occupe que du métal précieux. On se base alors pour obtenir la valeur d'un lingot d'alliage sur le poids de ce lingot, le titre de l'alliage et la va-

leur du kilogramme d'or fin ou d'argent fin. La valeur d un kilogramme d'or fin est 3444f,44 ; celle d'un kilogramme d'argent fin avait été fixée conventionnellement à 222f,22 ; mais depuis cette époque, la valeur de l'argent a baissé : aujourd'hui elle est variable et moindre que le prix ci-dessus indiqué.

Pour apprécier la valeur d'un objet fabriqué avec un alliage d'or ou d'argent, il faut encore tenir compte du travail des ouvriers employés à cette besogne et de leur talent. Mais ceci ne peut nous occuper dans un ouvrage de ce genre, et nous ne parlerons jamais que de la valeur intrinsèque d'un objet, de sa valeur absolue.

Les objets fabriqués pour la France et en France sont à trois titres, s'ils sont en or, et à deux titres, s'ils sont en argent.

Ce sont, pour les objets d'or, les titres de 920 millièmes, 840 millièmes et 750 millièmes. Pour les objets d'argent ce sont les titres de 950 millièmes et 800 millièmes.

Pour les objets fabriqués en France et destinés à l'exportation, il n'y a pas de titres déterminés ; mais le fabricant doit indiquer le titre par un poinçonnage spécial.

Pour évaluer la valeur intrinsèque d'un alliage, il faut connaître son poids et le titre de cet alliage. On néglige d'ailleurs la valeur du métal ordinaire qui entre dans la composition de l'alliage.

Du reste les quelques exemples numériques que nous allons traiter feront bien comprendre la nature des questions dont nous nous occupons maintenant.

1er Problème. — *Quelle est la valeur intrinsèque d'un objet d'or au second titre, sachant qu'il pèse* 2kg,500?

Chaque gramme de cet alliage contient 0g,840 d'or ; par conséquent 2500 grammes contiennent $0,840 \times 2500 = 2100^g$. Or le kilogramme d'or fin vaut 3444f,44 ; donc 2100g valent $3444,44 \times 2,1$ ou 7233f,32.

2e Problème. — *Quel est le titre d'un objet d'argent pesant* $3^{kg},420$ *et valant* 570^f ?

L'argent fin vaut conventionnellement $222^f,22$ le kilogramme; il y aura donc autant de kilogrammes d'argent fin dans l'objet en question qu'il y a d'unités dans le quotient de 570 par 222,22, c'est-à-dire $2^{kg},565$. Le titre de cet objet est par suite le quotient de 2565 par 3420 ou 0,750.

3e Problème. — *Quel est le poids d'un objet d'or au premier titre et valant* $180^f,63$?

Puisque l'or fin vaut $3444^f,44$ le kilogramme, le poids de l'or fin contenu dans l'objet en question est le quotient de 180,63 par 3444,44 ou $\frac{180,63}{3444,44}$; ce nombre exprime le poids en kilogrammes; pour avoir le poids en grammes, il faut multiplier le nombre précédent par 1000 ; on a ainsi : $\frac{18063000}{344444}$. D'autre part, cet objet étant au premier titre, 920^g d'or fin donnent un poids de 1000^g; donc un gramme donne $\frac{100}{92}$. On obtiendra donc le poids total en multipliant le nombre obtenu antérieurement par $\frac{100}{92}$. On a ainsi $\frac{1806300000}{92 \times 344444} = 57^g$.

170. **Problèmes généraux sur les alliages.** — Il nous reste à parler de deux problèmes importants que nous allons donner sous une forme tout à fait générale.

1° *On forme à l'aide de plusieurs lingots composés des mêmes métaux, de titres respectifs* $t_1, t_2, \ldots t_n$, *et de poids* $p_1, p_2, \ldots, p_n$, *un autre lingot dont on demande le titre.*

Le titre d'un lingot étant le poids du métal fin que chaque unité de poids de cet alliage renferme, les divers lingots employés contiennent en métal fin les poids $p_1t_1, p_2t_2, \ldots, p_nt_n$; le lingot formé par leur réunion contient donc en métal fin le poids

$$p_1t_1 + p_2t_2 + \ldots + p_nt_n;$$

en outre son poids total est

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n ;$$

donc le titre de l'alliage ainsi obtenu est donné par le rapport

$$t = \frac{p_1 t_1 + p_2 t_2 + \ldots + p_n t_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

2° *Avec plusieurs alliages composés des mêmes métaux et de titres respectifs* $t_1, t_2, \ldots, t_n$, *former un autre alliage de titre déterminé,* t.

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les poids des lingots employés, le lingot final aura pour poids $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$, il renfermera donc en métal fin le poids

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)t ;$$

d'autre part le poids du métal fin contenu dans le lingot de titre t_k est $p_k t_k$; donc le poids total de ce métal est

$$p_1 t_1 + p_2 t_2 + \ldots + p_n t_n,$$

et on a l'égalité

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)t = p_1 t_1 + p_2 t_2 + \ldots + p_n t_n.$$

Cette équation est la seule que l'on ait pour déterminer les rapports des poids p_k entre eux ; le problème est donc indéterminé dès qu'on emploie plus de deux alliages.

Si on emploie deux alliages seulement, on a l'équation

$$(p_1 + p_2)t = p_1 t_1 + p_2 t_2,$$

qui donne immédiatement le rapport $\frac{p_1}{p_2}$,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{t_2 - t}{t - t_1}.$$

En supposant $t_1 < t_2$, on voit de suite que le problème n'est possible que si t est compris entre t_1 et t_2, et alors le rapport précédent indique dans quelles proportions il faut combiner les deux alliages pour avoir un autre alliage au titre indiqué, t.

171. **Problèmes sur les mélanges.** — Il est inutile de donner la définition du mélange; il nous suffira de traiter les problèmes principaux qui s'y rapportent.

Un mélange étant formé par la réunion de plusieurs substances dont l'unité de poids ou de volume a pour chacune un prix connu, on demande de déterminer le prix de l'unité correspondante du mélange.

2° *Trouver dans quelles proportions on doit mélanger diverses substances de prix connus pour obtenir un mélange dont le prix de l'unité soit aussi donné.*

Ces deux problèmes se traitent de la même façon que les problèmes généraux sur les alliages.

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les quantités employées des diverses substances indiquées, c'est-à-dire leurs poids ou leurs volumes, et soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ les prix respectifs de l'unité de chacune d'elles ; le prix total du mélange sera

$$p_1f_1 + p_2f_2 + \ldots + p_nf_n.$$

D'autre part, le mélange renferme

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

unités et, si l'on désigne par f le prix de l'unité, il vaut en tout

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)f.$$

On a donc l'égalité

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)f = p_1f_1 + p_2f_2 + \ldots + p_nf_n,$$

et cette équation donne la solution des deux problèmes généraux que nous avons indiqués.

Elle donne

$$f = \frac{p_1f_1 + p_2f_2 + \ldots + p_nf_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n};$$

c'est le prix de l'unité du mélange ; c'est la solution du premier problème.

Si, au contraire, on se donne f, elle permet de déterminer les rapports des nombres p_k, c'est-à-dire les quantités des substances que l'on doit employer. Lorsque le nombre des substances employées est supérieur à deux, ce dernier problème est indéterminé : on peut se donner les poids de toutes les substances sauf une, ou bien tous les rapports sauf un.

Quand on n'emploie que deux substances, le rapport des quantités employées, $\frac{p_1}{p_2}$, se calcule immédiatement et l'on a

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{f_2 - f}{f - f_1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{p_1}{p_2} = \frac{f - f_2}{f_1 - f},$$

suivant que $f_1 < f < f_2$ ou $f_2 < f < f_1$. On voit en outre que le problème n'est possible que si le prix indiqué pour le mélange est compris entre les prix f_1 et f_2 des substances à mélanger.

Si l'on veut tenir compte du bénéfice à réaliser par le marchand, il suffira de l'ajouter au prix total du mélange pour obtenir par un procédé semblable le prix moyen de vente du mélange : ainsi soit B le bénéfice total qu'il veut réaliser, on aura cette fois l'égalité

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)f = p_1f_1 + p_2f_2 + \ldots + p_nf_n + \mathrm{B}.$$

Mais des exemples particuliers feront mieux comprendre toutes ces questions et surtout les solutions purement arithmétiques que l'on peut en donner.

Exemples. — 1° *Un négociant mélange* 6 *sacs de farine à* 54^f *le*

sac, 8 sacs à 52f le sac et 11 sacs à 49f le sac. On demande le prix de revient du sac de mélange;

Le prix de vente d'un sac de ce mélange sachant que le négociant veut gagner 2f par sac sur le prix précédent supposé prix d'achat;

Enfin le prix de vente de chaque sac sachant que le négociant veut gagner 10 °/₀ sur le prix d'achat.

La solution de ce problème peut se présenter ainsi :

6 sacs de farine à 54f le sac valent 54×6 ou 324^f;

8 sacs à 52f le sac valent 52×8 ou 416^f;

et 11 sacs à 49f le sac valent 49×11 ou 539^f.

Le mélange vaut donc $324 + 416 + 539$ ou $1\,279^f$. Tel est le prix des 25 sacs du mélange ; un sac vaut 25 fois moins ou $\frac{1\,279}{25} = 51^f,16^c$.

Si le marchand veut gagner 2f par sac, il vendra $53^f,16^c$ le sac du mélange.

S'il veut gagner 10 p. °/₀ il vendra le sac $51^f,16 + 5^f,116 = 56^f,27^c$.

2° *Dans quelles proportions un marchand doit-il mélanger deux vins qui lui coûtent respectivement 0f,60c et 0f,35c le litre pour obtenir du vin qu'il puisse vendre 0f,50 le litre en gagnant 10 p. °/₀ sur le prix d'achat ?*

Le prix de vente représente les $\frac{110}{100}$ du prix d'achat : d'abord ce prix lui-même ou $\frac{100}{100}$, puis les $\frac{10}{100}$ de ce prix qu'il veut réaliser comme bénéfice. Or 110 centièmes valent 0,50, un centième vaut donc 110 fois moins ou $\frac{0,50}{110}$ et 100 centièmes valent 100 fois plus ou $\frac{0,50 \times 100}{110}$. Ce calcul effectué donne $0^f,454$ pour le prix de revient d'un litre du mélange.

Chaque fois que le négociant prend un litre de vin à $0^f,60$, il perd $0,60 - 0,454 = 0^f,146$; chaque fois qu'il prend un litre de vin à $0^f,35$, il gagne $0,454 - 0,35 = 0^f,104$. Si donc on désigne par x le nombre de litres du premier vin et par y le nombre de litres du second qu'il prend pour former le mélange, on devra avoir

$$0,146 \times x = 0,104 \times y,$$

ou

$$146.x = 104.y\ ;$$

le rapport $\frac{x}{y}$ est donc égal à $\frac{104}{146}$ ou à $\frac{52}{73}$: pour 52 litres du premier vin il faudra prendre 73 litres du second.

Pour achever de déterminer le nombre de litres de chaque

vin qu'il faut prendre, il faudra indiquer en outre le nombre total de litres du mélange ou le nombre de litres de l'un des vins que l'on veut mélanger.

3° *Un marchand achète 3 pièces de vin de 225 litres chacune au prix de 22f l'hectolitre pris sur place et 4 pièces de même capacité à raison de 19f l'hectolitre. Les frais de transport et autres s'élèvent à 7f par hectolitre. Quelle quantité d'eau doit-il ajouter au mélange pour gagner 30 °/₀ en revendant le tout à raison de 0f,30c le litre?*

Ce marchand a acheté 3×225 ou 675 litres de vin à 22f l'hectolitre; il a déboursé pour cela $675 \times 0,22 = 148^f,50$. Il a acheté 4×225 ou 900 litres de vin à 19f l'hectolitre; il a déboursé ainsi $9 \times 19 = 171^f$.

Les 15,75 hectolitres qu'il a achetés lui coûtent en outre chacun 7f; d'où un nouveau débours de $15,75 \times 7 = 110^f,25$.

Il a dépensé en tout $148,50 + 171 + 110,25 = 429^f,75$. Comme il veut gagner 30 °/₀, le prix de vente doit dépasser le prix de revient de $429,75 \times 0,3 = 128^f,925$; il doit donc revendre le tout

$$429,75 + 128,92 = 558^f,67.$$

Quand la quantité d'eau nécessaire aura été ajoutée au mélange, chaque litre devra valoir 0f,30; il faudra donc qu'il possède en tout $\frac{558,67}{0,3} = 1862,2$ litres environ. Or les deux vins mélangés forment à eux seuls 1575 litres; donc il devra ajouter $1862,2 - 1575 = 287,2$ litres d'eau.

EXERCICES

1° Chaque page d'un in-octavo contient 35 lignes; il y a 11 mots en moyenne par ligne et 475 pages. Combien faudrait-il de temps pour lire cet ouvrage en prononçant 185 mots par minute? Quel serait l'espace parcouru par un train qui fait 55km à l'heure pendant ce temps?

2° 92 ouvriers mettent 35 heures à faire un ouvrage déterminé. Combien 161 ouvriers mettront-ils de temps?

3° 1554 kilogrammes de blé ont été vendus 483f. L'hectolitre vaut 23f ; combien pèse un hectolitre ?

4° 30 ouvriers travaillant 8 heures par jour ont mis 27 jours pour faire 450 mètres d'un ouvrage déterminé. Combien de jours faudra-t-il à 18 ouvriers travaillant 9 heures par jour pour faire 270 mètres du même ouvrage ?

5° 25 ouvriers ont fait en 18 jours, en travaillant 11 heures par jour, 72 mètres d'un ouvrage dont la difficulté est exprimée par 3. Combien 42 ouvriers mettront-ils de jours, en travaillant 10 heures par jour, pour faire 120 mètres d'un ouvrage dont la difficulté est exprimée par 5 ?

6° Un industriel emploie deux ouvriers dont le premier reçoit pour sa journée un salaire double de celui que reçoit l'autre. On donne au premier pour 12 journées de travail 40f et 10 litres de vin ; on donne au second pour 9 journées de travail 16f,40 et 2 litres de vin. Quel est le prix d'un litre de ce vin ?

7° Dans une usine on emploie 50 hommes, 35 femmes et 20 enfants. Le montant des salaires d'une semaine de 6 jours de travail s'élève à 1344f. On sait que 8 journées d'homme valent 15 journées de femme et que 9 journées de femme valent 16 journées d'enfant. Trouver le salaire d'un homme, d'une femme et d'un enfant.

8° Une pièce d'étoffe de 48m,55 a coûté en tout la somme de 970f. Combien aurait-on de bénéfice par mètre, si 18m,50 de cette étoffe étaient vendus 492f,10 ?

9° 7 hectares 9 ares de vigne valent 15 hectares 83 ares de prairie et 28 hectares de prairie valent 62 hectares 65 ares de bois. Quel est le prix d'un hectare de bois, sachant que le prix d'un hectare de vigne est 5300f ?

10° Une personne a placé les $\frac{2}{5}$ de son capital à 6 p. °/₀ et le reste à 4 1/2 °/₀. La première partie rapporte par an 939f,60. Trouver la deuxième partie et le revenu total, et de plus le taux unique auquel il faudrait placer le capital entier pour obtenir le même revenu.

11° Une personne qui devait payer sa dette le 10 novembre ne l'a payée que le 15 janvier suivant, ce qui a augmenté sa dette de 42f. L'intérêt étant de 5 p. °/₀ par an, que devait cette personne ?

12° Une personne emprunte une certaine somme, et au bout de 8 mois elle rembourse le capital avec les intérêts en donnant 2587f,50. Quel était le capital emprunté, sachant que les intérêts ont été calculés à raison de 5f,25 °/₀ par an ?

13° Quelle somme faut-il placer en ce moment à 5 p. °/₀ par an pour recevoir dans 3 mois 18 jours 875f, capital et intérêts ?

14° Une personne pouvant disposer d'une somme de 1800f en place une partie à 4f,50 p. °/₀ et le reste à 5f,75 p. °/₀ ; après 4 ans 3 mois elle retire 373f,75 pour l'intérêt de son capital Quelle est la somme qui a été placée à chaque taux ?

15° Une personne a fait 3 parts de son capital : la première a été placée à 5 p. °/₀ pendant 3 ans 8 mois ; la deuxième, qui est double de la première, a été placée à 5 p. °/₀ pendant 3 ans 6 mois ; la troisième, qui est triple de la seconde, a été placée à 4 p. °/₀ pendant 3 ans 9 mois. Les intérêts de ces divers capitaux se sont élevés à une somme totale de 14150f. Calculer les trois parts et le capital entier.

16° On achète 800f de rente 4 ½ p. °/₀ à 105f ; on vend 2 mois après cette rente à 106f,50, puis l'on achète du 3 p. °/₀ à 92f,60 que l'on revend 95f au bout d'un mois. Combien cette double opération a-t-elle rapporté et combien pour cent ?

17° On achète 3000f de rente 3 °/₀ à 102f,45 et huit jours après 4000f de la même rente à 100f,35. On demande : 1° de déterminer le cours auquel on pourrait vendre sans perte ; 2° de dire quel gain l'on fait en revendant le tout à 101f,75 ?

18° On présente à un banquier deux billets dont l'un était payable au bout de 30 jours et l'autre de 70 jours. L'escompte fait par le banquier a été de 20f,50 à raison de 7 p. °/₀. Si l'escompte avait été fait 10 jours plus tard, il aurait été moindre de 3f,55. Quelle était la valeur de chacun de ces effets ?

19° Un commissionnaire reçoit une caisse de marchandises pesant 234 kilogrammes, qu'il paye 250f le quintal. Il ouvre la caisse et s'aperçoit que cette marchandise a perdu par suite d'avaries les $\frac{2}{39}$ de sa valeur. Il la revend 572f,17 et reçoit en paiement un billet à 6 mois, qu'il fait escompter immédiatement à 6 p. °/₀. On demande ce qu'il a gagné ou perdu.

20° Un capitaliste a commencé une entreprise avec 126000f; trois mois après il s'est associé une personne qui a versé 7000f; trois mois après, il s'est associé une troisième personne qui a versé 15000f. Un mois après le troisième versement, le premier capitaliste se retire, et au bout d'un an l'entreprise se liquide avec 7500f de perte. Quelle part doit supporter chaque associé ?

21° Un particulier commence avec 12000f une affaire commerciale; huit mois plus tard, il y intéresse un capitaliste qui lui confie 20000f; dix mois après, un second capitaliste lui confie d'abord 30000f, et trois mois plus tard, 6000f. Au bout de 2 ans, l'entreprise a rapporté un bénéfice de 5000f. On demande quelle sera la part de chaque associé, sachant que le particulier qui conduit l'affaire prélève une prime de 4 p. °/₀ sur le bénéfice.

22° On fond ensemble trois lingots d'or : le premier au titre de 0,910 ; le second au titre de 0,860, et le troisième au titre de 0,780. Ils pèsent respectivement 675 grammes, 701 et 296 grammes. Quel est le titre de l'alliage ainsi obtenu ?

23° Dans quel rapport faut-il allier deux lingots d'argent aux titres de 0,870 et de 0,620, pour obtenir un alliage au titre de 0,750 ?

24° On mélange 665 litres d'un vin à 1f,50 le litre et 875 litres d'un autre vin à 1f,75 le litre. Combien faudra-t-il mettre d'un vin à 0f,25 le litre pour que le litre revienne à 1f,20 ?

LIVRE VI

CHAPITRE PREMIER

ERREURS (*)

172. Définitions. — Il est rare que les calculs numériques s'effectuent sur les valeurs exactes des nombres indiqués ; le plus souvent on leur substitue des nombres qui en diffèrent peu et qu'on appelle des *nombres approchés*.

Il est d'abord impossible de procéder autrement quand il s'agit de nombres qui proviennent de mesures, d'observations ou d'expériences qui sont toutes entachées d'erreurs, et qui, d'ailleurs, ne permettent d'évaluer ces nombres qu'avec une certaine approximation. Chacun d'eux diffère du nombre véritable d'une certaine quantité dont on peut seulement fixer une limite supérieure. Il peut même arriver que cette limite supérieure soit relativement beaucoup plus grande que la différence qui existe entre le nombre cherché et celui qu'on lui substitue, et qu'elle ne donne qu'une idée assez vague de l'approximation obtenue.

En second lieu, même quand un nombre est exactement connu, soit par sa définition arithmétique, soit par une définition géométrique, soit de toute autre façon, on ne l'introduit dans le calcul que par son développement déci-

(*) Ce chapitre a été inspiré en un assez grand nombre de points par la brochure de J. Griess sur les approximations numériques.

mal ; si celui-ci est illimité comme il arrive ordinairement, ou bien s'il contient un trop grand nombre de chiffres décimaux, on le remplace par un nombre voisin obtenu en supprimant tous les chiffres qui viennent après un certain rang, ou, ce qui revient au même, en les remplaçant tous par des zéros.

Nous appellerons *erreur absolue* la différence qui existe entre le nombre exact et le nombre approché qu'on lui substitue.

Mais cette définition trop précise correspond rarement à ce qui se passe dans les applications : l'erreur proprement dite n'est presque jamais connue ; il n'y a qu'une limite supérieure de cette erreur qui soit connue, et c'est cette limite que nous substituerons à l'erreur absolue.

Désignons par a un nombre exact inconnu, par a_1 le nombre approché et par α une limite supérieure de l'erreur commise ; nous pourrons affirmer seulement que le nombre a est compris entre $a_1 - \alpha$ et $a_1 + \alpha$, qui sont respectivement une limite inférieure et une limite supérieure de a et nous désignerons ces deux nombres par a' et a''. Inversement, si nous connaissons une limite inférieure et une limite supérieure d'un nombre inconnu, en prenant leur demi-somme nous aurons un nombre approché et l'erreur commise aura pour limite supérieure la demi-différence entre les deux nombres donnés.

Toutefois ce qu'il importe le plus de connaître, ce n'est pas l'erreur absolue : une même erreur absolue peut être insignifiante ou considérable suivant la grandeur du nombre cherché. Ainsi une longueur de plusieurs kilomètres connue à un mètre près est déterminée avec beaucoup d'approximation, au moins pour les besoins usuels ; au contraire, une longueur d'un décamètre environ connue à un mètre près, est mal déterminée.

Ce qu'il faut connaître, c'est donc l'erreur commise sur chaque unité du nombre à mesurer, c'est le rapport de

l'erreur absolue au nombre lui-même ; c'est ce que nous appellerons l'*erreur relative*.

L'erreur relative a pour expression numérique $\frac{\alpha}{a}$ en gardant les notations précédentes. Généralement ce n'est que par sa limite supérieure qu'elle interviendra dans les calculs et son expression sera $\frac{\alpha}{a'}$, α étant une limite supérieure de l'erreur absolue et a' une limite inférieure du nombre a.

Nous dirons qu'un nombre a_1 est *approché* d'un nombre a à α près *par défaut* ou par *excès*, quand il diffèrera de ce nombre d'une quantité moindre que α, en étant plus petit que lui dans le premier cas et plus grand dans le second.

Si nous observons maintenant que tout nombre peut au moins être pensé comme étant développé en décimales aussi loin que l'on veut, nous voyons que nous obtiendrons deux nombres décimaux approchés à moins de $\frac{1}{10^n}$ près en ne gardant que les n premiers chiffres décimaux et en ajoutant 0 ou une unité au dernier chiffre décimal à droite. Le premier de ces nombres est approché par défaut, et le second, par excès. Ce sont, d'ailleurs, les seuls nombres décimaux ayant n chiffres décimaux qui jouissent de cette propriété, car les autres diffèrent de ceux-ci d'au moins une unité du n^e ordre décimal, dans le même sens qu'eux par rapport au nombre exact. L'erreur qui correspond à chacun d'eux est donc supérieure à $\frac{1}{10^n}$.

Les deux nombres décimaux que nous avons envisagés se nomment les *valeurs approchées par défaut* ou *par excès* à $\frac{1}{10^n}$ près du nombre considéré.

Pour obtenir la valeur approchée par défaut à $\frac{1}{10^n}$ près, on supprime dans le développement décimal tous

les chiffres qui suivent le n^e chiffre décimal ; et, pour obtenir la valeur approchée par excès, on ajoute une unité du dernier ordre décimal conservé à la valeur précédente.

Exemple. — Considérons le nombre imparfaitement connu 3,141592..., dont nous avons les six premiers chiffres décimaux ; les nombres 3, 3,1, 3,14, 3,141, ... sont les valeurs approchées par défaut à une unité, un dixième, un centième, un millième près, etc. ; les nombres 4, 3,2, 3,15, 3,142, ... sont les valeurs approchées par excès.

Si nous substituons au nombre lui-même les nombres 3,1415 et 3,1416, nous commettons dans le premier cas une erreur absolue moindre que $\frac{1}{10^4}$, par suite, une limite supérieure de l'erreur relative est $\frac{1}{3.10^4}$; dans le second cas, l'erreur est par excès, elle est moindre que $\frac{1}{10^4}$ ou même que $\frac{1}{10^5}$, et la limite supérieure de l'erreur relative que nous envisagerons est $\frac{1}{3.10^5}$.

Nous dirons qu'un nombre approché a_1 a *m chiffres exacts* lorsque ses m premiers chiffres à partir de la gauche coïncident avec ceux du développement fourni par le nombre exact. Le nombre formé par ces m chiffres est alors la valeur approchée par défaut du nombre exact à une unité près de l'ordre représenté par le m^e chiffre.

Ainsi soit $\pi_1 = 3,14257$ un nombre approché du nombre

$$\pi = 3,141592...,$$

ce nombre a trois chiffres exacts.

Nous dirons qu'un nombre approché a_1 est *connu avec m chiffres* lorsque le nombre obtenu en gardant les m premiers chiffres à partir de la gauche est l'une des valeurs approchées par défaut ou par excès du nombre exact à une unité près de l'ordre représenté par le m^e chiffre.

Ainsi nous dirons que le nombre

$$a_1 = 5,71489$$

est connu avec quatre chiffres si l'on sait que 5,714 est une des valeurs approchées par défaut ou par excès du nombre exact a, à un millième près. Le nombre a est alors sûrement compris entre 5,713 et 5,715 ; le nombre approché a_1 a donc trois chiffres exacts.

Lorsqu'un nombre approché est connu avec m chiffres, en général, les $m-1$ premiers chiffres sont exacts, le m^e est incertain. Cependant ce résultat peut être en défaut si le m^e chiffre est un 0 ou un 9, car alors en ajoutant et retranchant une unité du dernier ordre conservé, non seulement le m^e chiffre, mais aussi le $m-1^e$ est modifié par l'une des deux opérations.

173. Relations entre l'erreur absolue et le nombre des chiffres exacts. — 1° *Lorsqu'un nombre approché a n décimales exactes, son erreur absolue est moindre que* $\frac{1}{10^n}$.

Cette propriété est presque évidente d'après ce qui précède. Démontrons-la sur un exemple.

Considérons le nombre $\pi_1 = 3,14567$ connu avec deux décimales exactes. Alors, d'après nos définitions, le nombre exact, π, est compris entre 3,14 et 3,15 qui diffèrent entre eux de $\frac{1}{10^2}$; le nombre π_1 est aussi compris entre les mêmes nombres ; donc il diffère de π d'une quantité moindre que $\frac{1}{10^2}$.

2° *Si l'erreur absolue d'un nombre approché a pour limite supérieure* $\frac{1}{10^n}$, *ce nombre a en général* $n-1$ *décimales exactes.*

En effet soit a_1 le nombre approché ; le nombre exact est compris entre $a_1 - \frac{1}{10^n}$ et $a_1 + \frac{1}{10^n}$. Or si le n^e chiffre

n'est ni un 0 ni un 9, les deux nombres précédents se forment en diminuant et augmentant le n^e chiffre de 1 et les autres chiffres du développement ne sont pas altérés; les $n-1$ premières décimales sont donc des chiffres exacts, c'est-à-dire des chiffres du développement décimal qui représente le vrai nombre.

Ce raisonnement ne s'applique évidemment pas au cas où le n^e chiffre est un 0 ou un 9, car alors le chiffre précédent est modifié dans l'un des deux nombres $a_1 - \frac{1}{10^n}$, $a_1 + \frac{1}{10^n}$. Dans ce cas, il y a en général $n-2$ chiffres exacts.

Exemples : — Soit $a_1 = 2{,}72609$ un nombre approché à $\frac{1}{1000}$ près; le nombre exact a est compris entre

$$2{,}72509 \quad \text{et} \quad 2{,}72709;$$

il a donc deux décimales exactes.

Soit $a_1 = 2{,}72934$ un nombre approché à $\frac{1}{1000}$ près; le nombre exact est compris entre

$$2{,}72834 \quad \text{et} \quad 2{,}73034;$$

il a donc une décimale exacte.

S'il y avait immédiatement avant ce n^e chiffre plusieurs chiffres qui, comme lui, fussent des 0 ou des 9, ils seraient modifiés aussi et le résultat précédent serait aussi altéré.

A cause de ces restrictions, il est impossible de fixer a priori, d'une façon absolument certaine, le nombre des chiffres exacts d'un résultat de calcul. Mais cela importe peu, car ce qu'on tient surtout à connaître au début d'un calcul, c'est l'approximation sur laquelle on peut compter, c'est-à-dire une limite supérieure de l'erreur commise.

A ce point de vue les deux remarques suivantes sont intéressantes.

Lorsqu'un nombre est approché par excès à $\frac{1}{10^n}$ près, le

nombre plus simple qu'on obtient en supprimant tous les chiffres décimaux qui suivent le n^e est approché dans un sens ou dans l'autre à $\frac{1}{10^n}$ près.

Cela est absolument évident; car la nouvelle erreur que l'on commet est moindre que $\frac{1}{10^n}$ et est de sens contraire à la première; donc l'erreur totale est aussi moindre que $\frac{1}{10^n}$; mais on ne sait dans quel sens elle a lieu.

Lorsqu'un nombre est approché par défaut à $\frac{1}{10^n}$ près, le nombre plus simple qu'on obtient en supprimant tous les chiffres décimaux qui suivent le n^e et augmentant ensuite celui-ci d'une unité est approché dans un sens ou dans l'autre à $\frac{1}{10^n}$ près.

Cette remarque est aussi évidente que la précédente.

174. Relations entre l'erreur relative et le nombre des chiffres exacts. — Le paragraphe actuel peut être ramené entièrement au précédent au moyen des deux remarques suivantes :

Quand on connaît une limite supérieure de l'erreur absolue d'un nombre approché, on en déduit une limite supérieure de l'erreur relative en divisant la précédente par une limite inférieure du nombre exact;

Quand on connaît une limite supérieure de l'erreur relative d'un nombre approché, on en déduit une limite supérieure de l'erreur absolue en multipliant la première par une limite supérieure du nombre exact.

On n'altère pas l'erreur relative d'un nombre approché en multipliant le nombre exact et le nombre approché par le même nombre. La propriété suivante est dès lors évidente.

1° *Quand un nombre approché a m chiffres exacts et que son*

premier chiffre à gauche est c, son erreur relative a pour limite supérieure $\frac{1}{c.10^{m-1}}$.

En effet divisions ou multiplions le nombre exact et le nombre approché par une même puissance de 10, de telle sorte que la virgule vienne se placer à droite du premier chiffre significatif c; le nombre approché aura alors $m-1$ décimales exactes et sera plus grand que c; une limite supérieure de l'erreur absolue sera donc $\frac{1}{10^{m-1}}$ et, par suite, une limite supérieure de l'erreur relative sera $\frac{1}{c.10^{m-1}}$.

Pour que cette propriété s'applique aux nombres plus petits que un, il faut ne compter les chiffres exacts qu'à partir du premier chiffre non nul.

2° *Lorsque le premier chiffre significatif à gauche d'un nombre approché est c et que l'erreur relative est moindre que* $\frac{1}{\gamma.10^m}$, *ce nombre aura en général m chiffres exacts si* $c<\gamma$ *et* $m-1$ *seulement si* $c>\gamma$.

En effet, si nous multiplions ou si nous divisons le nombre exact et son nombre approché par une même puissance de 10 telle que la virgule vienne se placer à droite du chiffre c, le nombre approché aura pour limite supérieure $c+1$ qui est inférieur ou égal à γ; donc γ est aussi une limite supérieure du nombre et, comme l'erreur relative n'a pas changé, une limite supérieure de l'erreur absolue sera $\gamma\times\frac{1}{\gamma.10^m}=\frac{1}{10^m}$. Il n'y a plus qu'à se reporter au paragraphe précédent pour avoir la propriété énoncée.

Si $c\geqslant\gamma$, on prendra 10γ comme limite supérieure du nombre transformé et la limite supérieure de l'erreur absolue sera alors $\frac{1}{10^{m-1}}$. Il y a donc en général $m-2$ décimales exactes, c'est-à-dire en tout $m-1$ chiffres exacts.

On démontrera de même la propriété suivante :

3° *Lorsqu'un nombre a pour premier chiffre significatif à gauche* c *et est approché par excès, avec une erreur relative moindre que* $\frac{1}{\gamma.10^m}$, *si* $c < \gamma$, *on aura une valeur approchée connue avec* $m+1$ *chiffres en supprimant les chiffres qui suivent le* $(m+1)^e$. *Si* $c \geqslant \gamma$, *le même procédé donnera une valeur approchée connue avec* m *chiffres seulement.*

Quand le nombre est approché par défaut avec une erreur moindre que $\frac{1}{\gamma.10^m}$ on force d'une unité le $(m+1)^e$ chiffre à droite en partant de c et on a encore une valeur approchée connue avec $m+1$ ou avec m chiffres, suivant que c est moindre que γ ou au moins égal à γ.

Formules des erreurs.

175. — Lorsqu'un nombre inconnu résulte d'une suite d'opérations arithmétiques à effectuer sur d'autres nombres, il arrive souvent que ceux-ci ne sont pas connus exactement et que l'on ne peut opérer que sur des nombres approchés pour chacun desquels on connaît seulement une limite supérieure de l'erreur commise. Il importe alors de se rendre compte de l'erreur que l'on commet en se plaçant dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire en supposant que toutes les erreurs s'ajoutent et en prenant à chaque fois une limite supérieure de chacune d'elles ; en partant de cette idée on peut, dans chaque cas, calculer une limite supérieure de l'erreur commise sur le résultat et se rendre compte ainsi de l'approximation que l'on peut obtenir. Cette limite supérieure de l'erreur se nomme l'*erreur provenant des données.*

Mais cette évaluation de l'erreur n'est suffisante que si l'on effectue les calculs indiqués sur les nombres approchés eux-mêmes, sans modification, tels qu'ils sont donnés,

et si l'on garde le résultat complet obtenu. En général, ce n'est pas ainsi qu'on procède : chaque nombre approché est remplacé lui-même par un autre plus simple dans lequel on ne garde qu'un petit nombre de décimales et le résultat est simplifié d'une façon analogue en n'y conservant que les premiers chiffres vers la gauche ou en lui substituant un autre nombre approché de forme numérique plus simple. Il y a là une double cause d'erreurs nouvelles qu'il faudra ajouter encore à la précédente pour pouvoir juger avec sécurité de l'approximation obtenue.

Cela montre nettement que dans aucun cas on ne pourra compter sur une approximation plus grande que celle que donne l'évaluation d'une limite supérieure de l'erreur provenant des données.

Le problème qui nous occupe se décompose donc en deux :

1° Évaluer une limite supérieure de l'erreur commise dans le calcul d'une formule arithmétique, lorsqu'on connaît pour chaque nombre approché qui y figure une limite supérieure de l'erreur ; en d'autres termes trouver, pour un nombre inconnu défini par une suite de calculs arithmétiques, l'erreur provenant des données ;

2° Calculer avec une approximation donnée le résultat d'une formule arithmétique portant sur des nombres donnés et trouver le plus petit nombre de chiffres qu'il soit utile de conserver dans chacun d'eux ainsi que dans le résultat.

Le second problème se présente seul quand les données sont exactes. L'approximation obtenue est alors aussi grande que l'on veut, c'est-à-dire que l'erreur commise peut être rendue aussi petite que l'on veut. Mais il n'y a pas toujours avantage à abaisser ainsi l'erreur commise, car en général à toute diminution de cette erreur correspond une plus grande complication des calculs et aussi un résultat moins simple, puisqu'il est nécessaire, si l'on poursuit ce but, d'augmenter le nombre des chiffres conservés dans les nombres employés et dans le résultat.

Quand les données ne sont qu'approchées, il faut d'abord résoudre le premier problème et voir de quelle erreur maxima on peut disposer ensuite pour la simplification des calculs afin que l'erreur totale ne dépasse pas celle qui est permise.

Pour résoudre le premier problème, nous allons passer en revue les diverses opérations de l'arithmétique et indiquer les diverses formules d'erreurs auxquelles elles conduisent. Il nous suffira ensuite de combiner ces divers résultats pour obtenir celui qui se rattache à une formule quelconque d'arithmétique.

176. Addition et soustraction. — Examinons d'abord avec soin le cas de deux nombres a et b connus par des nombres approchés a_1 et b_1 avec des erreurs au plus égales à α et β. Le premier nombre est compris entre $a_1 - \alpha$ et $a_1 + \alpha$; le second, entre $b_1 - \beta$ et $b_1 + \beta$. La somme est donc comprise entre $a_1 + b_1 - \alpha - \beta$ et $a_1 + b_1 + \alpha + \beta$; il en résulte que le nombre cherché $a + b$ diffère du nombre approché $a_1 + b_1$ d'une quantité moindre que $\alpha + \beta$. Par conséquent *la limite supérieure de l'erreur commise sur la somme de deux nombres est égale à la somme des limites supérieures des erreurs commises sur chacun d'eux.*

S'il s'agit de la différence $a - b$, elle est comprise entre $a_1 - b_1 - \alpha - \beta$ et $a_1 - b_1 + \alpha + \beta$ et le résultat est encore le même.

Rien n'est plus simple que d'étendre ce résultat de proche en proche à une somme d'un nombre quelconque de parties ou à une expression de la forme

$$a + b - c + d - e + f.$$

La limite supérieure de l'erreur commise sur une expression de ce genre est égale à la somme des limites supérieures des erreurs commises sur les diverses parties.

177. Multiplication. — Considérons d'abord un produit

de deux facteurs a et b donnés par deux nombres approchés a_1 et b_1 avec des erreurs moindres que α et β. Le nombre $p = ab$ est compris entre $(a_1 - \alpha)(b_1 - \beta)$ et $(a_1 + \alpha)(b_1 + \beta)$; il diffère donc de $a_1 b_1$ d'une quantité moindre que $a_1\beta + b_1\alpha + \alpha\beta$. Si donc nous appelons π cette limite de l'erreur commise, nous aurons

$$\pi = (a_1 + \alpha)\beta + b_1\alpha.$$

En augmentant cette limite ainsi que les deux nombres $a_1 + \alpha$, b_1, nous pourrons écrire

$$\pi = a''\beta + b''\alpha,$$

a'' et b'' étant des limites supérieures de a et de b.

Divisons maintenant par le produit $a'b'$ de deux limites inférieures des nombres a et b ; le second membre deviendra

$$\frac{a''}{a'}\frac{\beta}{b'} + \frac{b''}{b'}\frac{\alpha}{a'}.$$

Or les deux nombres $\frac{a''}{a'}$, $\frac{b''}{b'}$, plus grands que 1, sont très voisins de 1 ; d'autre part, les erreurs commises ont toujours été agrandies notablement ; nous pouvons donc, dans la pratique, prendre $\frac{\alpha}{a'} + \frac{\beta}{b'}$ comme limite supérieure de l'erreur relative du produit ab. Par conséquent si nous désignons par α', β', π' des limites supérieures des erreurs relatives qui correspondent aux trois nombres a, b, p, nous pourrons écrire

$$\pi' = \alpha' + \beta'.$$

Ce résultat se généralise aisément et s'étend sans peine de proche en proche à un produit d'un nombre quelconque de facteurs, et l'on arrive à la règle suivante :

Une limite supérieure de l'erreur relative d'un produit s'obtient en prenant la somme des limites supérieures des erreurs relatives des facteurs.

En multipliant par le produit des limites supérieures des

divers facteurs, nous avons une limite supérieure de l'erreur absolue et nous voyons qu'*elle s'obtient en multipliant chaque limite d'erreur absolue par le produit des limites supérieures des autres facteurs et ajoutant les résultats.*

Ainsi la limite supérieure de l'erreur absolue d'un produit $p = abc$ est donnée par la formule

$$\pi = \alpha b''c'' + \beta c''a'' + \gamma a''b''.$$

Ce résultat important aurait pu tout aussi bien se déduire de la formule analogue qui a d'abord été établie dans le cas d'un produit de deux facteurs et qui se généralise presque aussi aisément que la formule relative aux erreurs relatives ; mais cette dernière est incontestablement plus élégante et plus facile à retenir.

Lorsque tous les facteurs sont égaux, que p est une puissance, $p = a^m$, la formule des erreurs absolues devient

$$\pi = ma''^{m-1}\alpha,$$

et celle des erreurs relatives,

$$\pi' = m\alpha',$$

Application. — *Avec quelle approximation peut-on calculer le produit*

$$p = 7{,}45 \times 9{,}431$$

sachant que chaque facteur est approché à moins d'une unité de l'ordre de son dernier chiffre à droite ?

Ici $p = ab$, $\pi = a''\beta + b''\alpha$, $\alpha = \frac{1}{100}$, $\beta = \frac{1}{1000}$;

puis $a'' = 7{,}46$, $b'' = 9{,}432$.

Par conséquent $\pi = 0{,}00746 + 0{,}09432$;

donc $\pi = 0{,}10178$.

Tel est le maximum de l'erreur commise ; en général, à cause des exagérations déjà commises, on pourra prendre $\pi = \frac{1}{10}$; en tout cas, on est sûr que l'erreur est moindre que $\frac{2}{10}$.

178. **Division.** — Considérons le quotient $p = \frac{a}{b}$ de deux nombres donnés par des nombres approchés a_1 et b_1 avec des erreurs absolues moindres que α et β. Le nombre p est compris entre $\frac{a_1 - \alpha}{b_1 + \beta}$ et $\frac{a_1 + \alpha}{b_1 - \beta}$; il diffère donc de $\frac{a_1}{b_1}$ d'une quantité moindre que $\frac{a_1\beta + b_1\alpha}{b_1(b_1 - \beta)}$; par conséquent une limite supérieure de l'erreur absolue est formée par l'égalité

$$\pi = \frac{\alpha_1\beta + b_1\alpha}{b'^2},$$

b' étant la limite inférieure, ou, *a fortiori*, par l'égalité

$$\pi = \frac{a''\beta + b''\alpha}{b'^2},$$

a'' et b'' étant toujours les limites supérieures de a et de b.

En divisant par une limite inférieure du nombre p, $\frac{a'}{b''}$, nous aurons une limite supérieure de l'erreur relative

$$\frac{a''}{a'}\,\frac{b''}{b'}\cdot\frac{\beta}{b'} + \frac{b''^2}{b'^2}\,\frac{\alpha}{a'}.$$

Or nous avons déjà fait cette remarque que les deux nombres $\frac{a''}{a'}$, $\frac{b''}{b'}$, plus grands que 1, sont très voisins de 1, que, d'autre part, α et β sont en général des limites supérieures d'erreurs notablement agrandies ; par conséquent, nous aurons, avec une exactitude bien suffisante dans la pratique,

$$\pi' = \alpha' + \beta'.$$

C'est la formule des erreurs relatives : elle montre que *l'erreur relative d'un quotient a pour limite supérieure la somme des limites supérieures des erreurs relatives du dividende et du diviseur.*

Application. — Avec quelle approximation peut-on calculer le quotient

$$p = \frac{2{,}568}{3{,}1416},$$

sachant que chacun des nombres approchés diffère du nombre exact d'une quantité moindre qu'une unité de l'ordre de son dernier chiffre à droite?

Ici $\alpha = \frac{1}{1000}$, $\beta = \frac{1}{10000}$,

$$a'' = 3, \quad b'' = 4, \quad b' = 3$$

et $$\pi = \frac{3\beta + 4\alpha}{9} = \frac{43}{90000}.$$

On peut donc prendre pour π le nombre $\frac{45}{90000}$ ou $\frac{1}{2000}$.

Les erreurs relatives sont $\frac{1}{2000}$ et $\frac{1}{30000}$; donc l'erreur relative du quotient est plus petite que $\frac{16}{30000}$. Elle est sûrement moindre que $\frac{1}{1000}$.

Si on avait calculé d'abord cette limite supérieure de l'erreur relative et qu'on voulût en déduire une limite supérieure de l'erreur absolue, on remarquerait ici que 1 est une limite supérieure du nombre et que par suite l'erreur absolue est moindre que $\frac{1}{1000} \times 1$ ou $\frac{1}{1000}$. Nous trouvons ainsi une limite double de la première, ce qui montre bien les exagérations qui se produisent par nos méthodes et le peu de danger qu'il y a eu à remplacer antérieurement $\frac{a''}{a'}$, $\frac{b''}{b'}$ par 1.

179. **Racine carrée.** — Soit a un nombre connu par un nombre approché a_1 avec une erreur moindre que α, le nombre $\sqrt{a}$ est compris entre $\sqrt{a_1 - \alpha}$ et $\sqrt{a_1 + \alpha}$; par conséquent le nombre $\sqrt{a_1}$ diffère du nombre exact d'une quantité moindre que $\sqrt{a_1} - \sqrt{a_1 - \alpha}$ ou $\sqrt{a_1 + \alpha} - \sqrt{a_1}$; or, en multipliant et divisant la première quantité par

$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_1 - \alpha}$, la seconde par $\sqrt{a_1 + \alpha} + \sqrt{a_1}$, elles deviennent respectivement $\frac{\alpha}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_1 - \alpha}}$ et $\frac{\alpha}{\sqrt{a_1 + \alpha} + \sqrt{a_1}}$; elles sont moindres toutes deux que $\frac{\alpha}{2\sqrt{a'}}$, a' étant une limite inférieure de a, au plus égale à $a_1 - \alpha$.

Si nous divisons cette limite supérieure d'erreur absolue par une limite inférieure du nombre, $\sqrt{a'}$, nous obtenons une limite supérieure de l'erreur relative, $\frac{\alpha}{2a'}$.

Donc *une limite supérieure de l'erreur relative d'une racine carrée s'obtient en prenant la moitié de l'erreur relative du nombre soumis à cette racine.*

Application. — *Avec quelle approximation peut-on calculer* $\sqrt{4,32785}$, *sachant que l'erreur relative du nombre approché est moindre que* $\frac{1}{1000}$?

L'erreur relative du résultat est moindre que $\frac{1}{2000}$; d'autre part, le nombre cherché est moindre que 3, donc l'erreur absolue est moindre que $\frac{3}{2000}$.

Effectuons maintenant le calcul, nous trouvons 2,080; si donc nous prenons 2,08 nous commettions une nouvelle erreur moindre $\frac{1}{1000}$, l'erreur totale est donc plus petite que $\frac{2,5}{1000}$ et *a fortiori* que $\frac{1}{100}$, la racine est connue avec 3 chiffres. La seconde erreur est par défaut ; si donc on sait que la première l'est aussi, les trois chiffres conservés sont exacts. Mais si l'on ne sait rien sur le sens de la première erreur, on peut affirmer simplement que 2,08 est l'une des deux valeurs approchées du nombre cherché à $\frac{1}{100}$ près, par défaut ou par excès.

180. Racine cubique. — L'erreur commise est ici moindre que $\sqrt[3]{a_1} - \sqrt[3]{a_1 - \alpha}$ ou $\sqrt[3]{a_1 + \alpha} - \sqrt[3]{a_1}$. Pour transformer la première différence, par exemple, on s'appuie sur l'identité

$$x^3 - y^3 \equiv (x - y)(x^2 + xy + y^2),$$

et on multiplie puis on divise cette différence par la même quantité

$$(\sqrt[3]{a_1})^2 + \sqrt[3]{a_1}\sqrt[3]{a_1 - \alpha} + (\sqrt{a_1 - \alpha})^2 ;$$

elle devient alors

$$\frac{\alpha}{(\sqrt{a_1})^2 + \sqrt[3]{a_1}\sqrt{a_1 - \alpha} + (\sqrt{a_1 - \alpha})^2},$$

quantité moindre que $\frac{\alpha}{3(\sqrt[3]{a'})^2}$, a' étant une limite inférieure de a, au plus égale à $a_1 - \alpha$.

La seconde différence conduit au même résultat. Donc une limite supérieure de l'erreur absolue est $\frac{\alpha}{3(\sqrt[3]{a'})^2}$.

Nous aurons une limite supérieure de l'erreur relative en divisant le nombre précédent par $\sqrt[3]{a'}$; nous aurons ainsi $\frac{\alpha}{3a'}$. Par conséquent *on obtient une limite supérieure de l'erreur relative d'une racine cubique en prenant le tiers de la limite supérieure de l'erreur relative du nombre envisagé.*

181. Formule générale du monome. — Considérons, par exemple, le nombre p à calculer par la formule

$$p = \frac{ab^m}{c\sqrt{d}}.$$

Désignons par α', β', γ', δ' et π' des limites supérieures des diverses erreurs relatives ; en appliquant successivement les diverses règles que nous avons établies pour les opérations simples de l'arithmétique, nous aurons

$$\pi' = \alpha' + m\beta' + \gamma' + \frac{\delta'}{2}.$$

Quand nous aurons π', il sera aisé de calculer π, la limite supérieure de l'erreur absolue et de nous rendre compte de l'approximation que l'on peut obtenir ; il suffira de calculer sommairement, à vue, une limite supérieure du nombre p, p'', et de multiplier π' par p''.

Caloul du résultat d'une formule arithmétique donnée avec une approximation donnée.

182. Nous n'avons plus à nous occuper maintenant que du second problème, dont nous allons d'ailleurs exposer l'énoncé à nouveau avec détails.

Étant donnée une expression numérique portant sur des nombres exactement connus, nous nous proposerons de calculer le résultat auquel elle conduit avec une approximation donnée, en cherchant quelle erreur nous pourrons commettre sur chacun des nombres de cette formule sans cesser d'obtenir l'approximation demandée, et en profitant de cette erreur permise pour simplifier autant que possible le nombre envisagé, c'est-à-dire pour déterminer le plus petit nombre de chiffres qu'il soit nécessaire de garder dans ce nombre.

Généralement l'approximation demandée s'énonce en disant que le résultat doit être connu avec un certain nombre de chiffres décimaux, ou à une unité près du m^e ordre décimal, ou, d'une façon plus générale, à n unités près du m^e ordre décimal.

Il est naturel alors, une fois le calcul terminé, de ne garder dans le résultat que les m premiers chiffres décimaux, c'est-à-dire les chiffres qui représentent des unités de l'ordre indiqué dans l'approximation ou qui représentent des unités d'ordres supérieurs. On supprime alors tous les chiffres qui suivent le m^e chiffre décimal et on garde le m^e ou on le force d'une unité, suivant que la partie supprimée est

moindre ou plus grande qu'une demi-unité du m^e ordre décimal. On commet ainsi une nouvelle erreur moindre qu'une demi-unité du m^e ordre décimal et qu'il faut ajouter à celles qui proviennent des simplifications faites ou à faire pour avoir une idée juste de l'approximation finale. Pour que celle-ci reste ce qu'elle doit être, il faudra alors imposer à l'erreur absolue du résultat complet l'obligation d'être moindre que $n - 0,5$ unités du m^e ordre décimal.

Nous ne nous servirons dans ce qui suit que des formules d'erreurs absolues et nous commencerons, d'abord par les formules simples qui ne renferment que l'indication d'une seule opération.

183. **Addition et soustraction.** — Supposons qu'il s'agisse d'effectuer la somme de 12 nombres à une unité près du quatrième ordre décimal, ou une expression composée d'additions et de soustractions successives.

Alors la limite supérieure de l'erreur absolue imposée au résultat complet doit être $\frac{0,5}{10000}$ ou $\frac{1}{20000}$. Il faudra alors ne commettre sur chacun des nombres employés qu'une erreur au plus égale à $\frac{1}{12 \times 20000}$ ou à $\frac{1}{240000}$ ou enfin à $\frac{1}{1000000}$; par suite, on conservera dans chacun de ces nombres les six premières décimales seulement, on fera ensuite la somme indiquée et on supprimera les deux derniers chiffres décimaux, en forçant le dernier chiffre conservé lorsque le premier chiffre supprimé est égal ou supérieur à 5.

Lorsqu'on n'a pas d'intérêt à connaître le sens de l'erreur finale, on peut prendre certains des nombres par excès et d'autres par défaut; cela ne peut que diminuer l'erreur totale. Mais si l'on a intérêt à évaluer le résultat, soit par excès, soit par défaut, il faudra prendre tous les nombres de façon qu'ils soient approchés dans le même sens.

184. Multiplication. — Exemple : Calculer le produit $\pi\sqrt{3}$, à $\frac{1}{1000}$ près.

$$\pi = 3{,}141592\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1{,}732050.$$

Désignons les deux nombres employés par a et b, appelons c le produit et appliquons la formule des erreurs absolues avec les notations indiquées antérieurement

$$\gamma = a''\beta + b''\alpha;$$

nous devrons satisfaire à l'inégalité

$$a''\beta + b''\alpha < \frac{1}{2000},$$

et il nous suffira de poser $a''\beta < \frac{1}{4000}$ et $b''\alpha < \frac{1}{4000}$. Comme $a'' = 4$ et $b'' = 3$, nous voyons qu'il suffit de prendre α et β moindres que $\frac{1}{100000}$, et, par suite, de garder 5 chiffres décimaux dans chacun des deux nombres.

Si nous posons $b''\alpha < \frac{1}{3000}$ et $a''\beta < \frac{1}{6000}$, nous voyons alors qu'il suffira de prendre 4 chiffres décimaux dans le premier nombre et 5 dans le second. Nous trouvons ainsi comme résultat 5,441235075 ; en supprimant tous les chiffres décimaux qui suivent le 3me, nous commettons une nouvelle erreur par défaut, moindre que $\frac{0{,}5}{1000}$ ou $\frac{1}{2000}$; cette erreur s'ajoute à celle déjà commise qui est par défaut aussi et moindre que $\frac{1}{2000}$; donc le nombre 5,441 est approché par défaut à moins de $\frac{1}{1000}$ et il a 4 chiffres exacts.

185. Division. — Exemple : *Soit à calculer à moins de* $\frac{1}{100}$ *le quotient*

$$c = \frac{a}{b} = \frac{4{,}527654\ldots}{3{,}141592\ldots}.$$

L'erreur permise sur le résultat complet est $\frac{1}{200}$. D'autre part, la formule des erreurs absolues est

$$\gamma = \frac{b''\alpha + a''\beta}{b'^2},$$

et l'on doit poser

$$\frac{b''\alpha + a''\beta}{b'^2} < \frac{1}{200},$$

ou

$$b''\alpha + a''\beta < \frac{9}{200}.$$

Nous prendrons, par exemple, $b''\alpha < \frac{8}{200}$ et $a''\beta < \frac{1}{200}$; comme $b'' = 4$ et $a'' = 5$, nous aurons pour limites supérieures de α et de β les nombres $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{1000}$; donc il nous suffira de garder deux décimales dans a et trois dans b et d'effectuer le quotient $\frac{4,52}{3,141}$ jusqu'à la troisième décimale afin de voir si on doit forcer ou non la seconde. Nous trouvons ainsi 1,438; donc le nombre demandé est 1,44, seulement on ne sait pas dans quel sens il est approché.

Si l'on prend $a = 4,52$ et $b = 3,142$, on sera sûr que le quotient complet sera approché par défaut. En prenant $a = 4,53$ et $b = 3,141$, le quotient complet sera approché par excès à moins de $\frac{1}{100}$. Ces deux procédés conduisent au même résultat que précédemment avec la même incertitude.

186. **Racine carrée.** — *Soit à calculer à* $\frac{1}{1000}$ *près la racine carrée de*

$$a = 4,527893\ldots$$

L'erreur permise sur le résultat complet est

$$\frac{1}{2000} = 1 \text{ millième} - \frac{1}{2} \text{ millième}.$$

D'autre part, une limite supérieure de l'erreur absolue commise sur la racine est $\frac{\alpha}{2\sqrt{a}}$, si α désigne celle que l'on peut commettre sur a. On déterminera donc α en posant $\frac{\alpha}{2\sqrt{a}} < \frac{1}{2000}$, ce qui donne $\alpha < \frac{2}{1000}$. Cette inégalité est remplie nécessairement si on prend $\alpha < \frac{1}{1000}$; par suite, il suffira de garder trois décimales dans le nombre employé.

On traitera tout aussi aisément le cas de la racine cubique.

187. Formule complexe. — Lorsqu'il s'agit d'une formule composée par l'indication de plusieurs opérations arithmétiques successives, on procède de proche en proche : on ramène l'opération totale à une suite d'opérations élémentaires dans chacune desquelles figurent au plus deux nombres choisis parmi les nombres donnés ou ceux qui en dérivent; la dernière conduit au résultat cherché et permet de fixer l'approximation nécessaire sur chacun des termes dont elle se compose; à l'aide de ces approximations on remonte aux opérations précédentes et on fixe de nouveau les approximations à faire sur les termes dont elles se composent; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on connaisse l'approximation relative à chacun des nombres donnés et aussi celle qui correspond à chaque résultat partiel.

Mais un exemple fera mieux comprendre le mécanisme de l'opération.

Proposons-nous de calculer à $\frac{1}{100}$ près le nombre $p = \frac{ab^3}{c\sqrt{d}}$, a, b, c, d ayant pour valeurs respectives,

$$a = 1{,}783645\ldots,$$
$$b = 2{,}054632\ldots,$$
$$c = 4{,}197021\ldots,$$
$$d = 6{,}742854\ldots$$

Nous poserons d'abord $b^3 = e$, puis $f = ae$, $l = \frac{f}{c}$, $m = \sqrt{d}$, et enfin $p = \frac{l}{m}$.

L'approximation demandée étant de $\frac{1}{100}$, si nous tenons compte de la nouvelle erreur qui proviendra de la suppression des chiffres décimaux qui suivent le second, en forçant au besoin celui-ci d'une unité, nous devrons calculer $\frac{l}{m}$ avec une erreur moindre que $\frac{1}{200}$ et nous aurons à déterminer λ et μ de façon que

$$\frac{l''\mu + m''\lambda}{m'^2} < \frac{1}{200};$$

or nous pouvons prendre $m' = 2$, et, par suite, poser simplement

$$l'\mu + m''\lambda < \frac{2}{100};$$

cette inégalité peut se dédoubler en

$$l''\mu < \frac{1}{100}, \qquad m''\lambda < \frac{1}{100};$$

or nous pouvons prendre aussi évidemment $l'' = 5$, $m'' = 3$; par conséquent λ et μ seront limités par les inégalités

$$\lambda < \frac{1}{300} = 0{,}0033\ \ldots,$$

et

$$\mu < \frac{1}{500} = 0{,}0020\ldots.$$

Pour calculer m, nous garderons donc les trois premiers chiffres décimaux du résultat et nous introduirons une nouvelle erreur égale au plus à une demi-unité du 3e ordre décimal, de sorte que l'erreur à commettre sur le nombre exact ne devra pas dépasser 0,0015... ; d'ailleurs la formule des erreurs relative à m est $\mu = \frac{\delta}{2\sqrt{d'}}$ ou ici $\mu = \frac{\delta}{4}$; nous

devrons donc avoir $\delta < 4 \times 0.0015 = 0,0060$ et il suffira de prendre dans d les trois premières décimales, puis de calculer sa racine carrée avec 4 décimales, les trois premières seules devant être conservées. Le calcul est fait à côté et donne 2,5965; il faut donc prendre $m = 2,597$.

6.74200000	2.5965
2.74	45
4920	5
33900	509
289400	9
	5186
	6
	51925

L'approximation relative à l est 0,0033..., elle doit être réduite à 0,0028.... Donc, en reprenant la formule des erreurs d'un quotient, nous aurons

$$\frac{c''\varphi + f''\gamma}{c'^2} < 0,0028,$$

et, comme $c' = 4$,

$$c''\varphi + f''\gamma < 16 \times 0,0028 = 0,0448.$$

Nous poserons donc

$$c''\varphi < 0,0224, \qquad f''\gamma < 0,0224,$$

et nous en déduirons $\varphi < 0,0044$, $\gamma < 0,0011$; il nous suffira donc de prendre c avec trois décimales et de calculer f avec une approximation au moins égale à 0,0044.

Nous sommes ramenés à effectuer la multiplication $f = ae$ avec une erreur absolue au plus égale à 0,0044; retranchons-en une demi-unité du troisième ordre décimal pour l'erreur que nous commettrons encore en négligeant les chiffres décimaux qui viendront après le troisième; nous devrons donc limiter φ par l'inégalité $\varphi < 0,0039$. Or nous pouvons prendre φ égal à $a''\varepsilon + e''\alpha$ et nous devrons choisir α et ε de façon à satisfaire à l'inégalité

$$a''\varepsilon + e''\alpha < 0,0039,$$

ou isolément

$$a''\varepsilon < 0,0019, \qquad e''\alpha < 0,0019;$$

d'ailleurs nous pouvons prendre $a'' = 2$ et $e'' = 10$. Nous sommes donc conduits finalement à

$$\varepsilon < 0,0009, \qquad \alpha < 0,00019;$$

par suite, nous garderons les quatre premières décimales de a et nous calculerons e avec quatre décimales.

Reste à calculer $e = b^3$. Ici la limite supérieure de l'erreur permise est $0{,}0009 - 0{,}00005 = 0{,}00085$; nous devrons donc poser $3b'^2\beta < 0{,}00085$ et, comme nous pouvons prendre $b'^2 = 5$, nous aurons $\beta < \frac{0{,}00085}{15}$ ou enfin $\beta < 0{,}00015$. Donc nous prendrons b avec cinq décimales.

Il serait facile maintenant d'achever les calculs. Nous le ferons bientôt, quand nous nous serons servis de l'exemple actuel pour expliquer les généralités que nous allons donner.

188. M. Guyou, à qui l'on doit de grands perfectionnements à la théorie des erreurs, indique le dispositif suivant pour ordonner les calculs et appliquer méthodiquement les règles données antérieurement :

1° Remplacer par des lettres, dans l'expression donnée, le nombre ou les nombres auxquels on espère pouvoir substituer des nombres plus simples. Un même nombre doit être représenté par autant de lettres distinctes qu'il se présente de fois dans la formule.

2° Préparer un tableau à quatre colonnes, ayant respectivement pour titres :

(1) Opérations à effectuer ;

(2) Résultats approchés par défaut et par excès ;

(3) Approximations nécessaires ;

(4) Résultats définitifs.

3° Indiquer dans la colonne (1) les opérations à effectuer successivement, en désignant par de nouvelles lettres les résultats de ces opérations et en ayant soin, lorsque, dans une de ces opérations, on aura à utiliser un des nombres qui ont été désignés au début par des lettres, de placer la lettre qui indique ce nombre avant l'opération elle-même.

4° Dans la colonne (2) on inscrira des valeurs grossière-

ment approchées par excès et par défaut des nombres mentionnés dans la colonne (1).

5° Inscrire sur la dernière ligne de la colonne (3) en regard du nombre demandé l'approximation demandée ; déterminer (en plaçant les calculs au-dessous du tableau) l'approximation nécessaire aux éléments de la dernière opération, l'inscrire en regard de ces éléments, et continuer, en remontant, jusqu'à ce que la colonne soit remplie.

6° On écrira immédiatement dans la colonne (4) les valeurs des nombres qui ont été désignés au début par des lettres, avec l'approximation indiquée en regard, et l'on effectuera enfin les opérations indiquées dans la colonne (1) en poussant les calculs jusqu'aux unités de l'ordre du premier chiffre significatif à gauche de l'approximation inscrite dans la colonne (3), en forçant d'une unité le dernier chiffre conservé, lorsque le premier chiffre supprimé est égal ou supérieur à 5.

Nous avons appliqué ce dispositif à l'exemple traité antérieurement et nous avons trouvé le tableau suivant :

(1) Opérations	(2) Val. approchée		(3) Approx.	(4) Résul. défin.
b	2	3	0, 00005	2, 05463
$e = b^3$	8	10	0, 0009	8, 7336
a	1	2	0, 0001	1, 7836
$f = ae$	8	20	0, 0044	7, 530
c	4	5	0, 0011	4, 197
$l = \frac{f}{c}$	1	5	0, 0033	1, 794
d	6	7	0, 006	6, 743
$m = \sqrt{d}$	2	3	0, 002	2, 597
$p = \frac{l}{m}$	1	3	0, 01	0, 69

$\frac{l''\mu + m''\lambda}{m'^2} < 0{,}01 - 0{,}005 = 0{,}005$ $l''\mu < 0{,}01\ ,\ m''\lambda < 0{,}01$ $\mu < 0{,}002\ ,\ \lambda < 0{,}0033$	$\frac{\delta}{2\sqrt{d'}} < 0{,}002 - 0{,}0005$ $< 0{,}0015$ $\delta < 0{,}0060$
$\frac{c''\varphi + f''\gamma}{c'^2} < 0{,}0033 - 0{,}0005 = 0{,}0028$ $c''\varphi + f''\gamma < 0{,}0448$ $c''\varphi < 0{,}0224\ ,\ f''\gamma < 0{,}0224$ $\varphi < 0{,}0044\ ,\ \gamma < 0{,}0011$	$a''\varepsilon + e''\alpha < 0{,}0044$ $- 0{,}0005$ $< 0{,}0039$ $a''\varepsilon < 0{,}0019$ $e''\alpha < 0{,}0019$ $\varepsilon < 0{,}0009,\ \alpha < 0{,}001$

$3b''^2\beta < 0{,}0009 - 0{,}00005 = 0{,}00085 \quad | \quad \beta < 0{,}00005$

Quelques mots sur l'emploi des erreurs relatives.

189. Lorsqu'on veut calculer un nombre donné comme résultat d'une formule numérique avec une erreur relative moindre qu'un nombre donné *a priori*, on peut revenir immédiatement aux erreurs absolues, et, par suite, aux calculs précédents en procédant de la façon suivante : on calcule grossièrement une limite inférieure du nombre cherché et on multiplie la limite supérieure de l'erreur relative imposée par le nombre ainsi trouvé ; il suffit évidemment de calculer le nombre cherché avec une erreur absolue moindre que le résultat ainsi obtenu.

Toutefois l'emploi des erreurs relatives elles-mêmes est commode dans quelques cas et permet d'aborder aisément les questions d'un certain genre. Proposons-nous, par exemple, de calculer un nombre avec m chiffres exacts : il suffira en général de calculer ce nombre avec une erreur absolue moindre qu'une unité de l'ordre du $(m+1)^e$ chiffre, c'est-à-dire avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{\gamma . 10^m}$ γ étant un

nombre d'un seul chiffre supérieur au premier chiffre significatif à gauche du nombre cherché ou bien γ étant égal à 10 ; car, si cela est, le nombre que l'on calcule est inférieur à γ quand on met la virgule à droite du premier chiffre significatif et l'erreur absolue est, par suite, moindre que $\frac{\gamma}{\gamma.10^m} = \frac{1}{10^m}$, le nombre exact est donc compris entre le nombre trouvé et celui que l'on obtient en augmentant d'une unité le m^e chiffre décimal, les $m-1$ premiers chiffres décimaux sont exacts en général et le nombre a m chiffres exacts. Nous supposons dans ce qui précède que l'approximation est faite par défaut.

Si l'on veut éviter le calcul du premier chiffre à gauche du nombre inconnu, on prend $\gamma = 10$; dans tous les cas le maximum ainsi fixé pour γ est sûrement acceptable.

190. **Produit ou quotient.** — Soit à calculer le produit de deux nombres connus a et b, $c = ab$, avec m chiffres exacts.

On commence par déterminer le premier chiffre à gauche du nombre c, γ', puis on prend $\gamma = \gamma' + 1$ et l'on impose à l'erreur relative l'obligation d'être moindre que $\frac{1}{\gamma.10^m}$. D'après la règle relative au produit et que nous avons établie antérieurement, il suffit de prendre des valeurs approchées de a et b telles que les erreurs relatives soient toutes deux moindres que $\frac{1}{2\gamma.10^m}$; on reconnaît alors à simple inspection le nombre de chiffres que l'on doit garder dans chacun des facteurs et il n'y a plus qu'à effectuer l'opération.

Exemple. — *Calculer le produit $\pi\sqrt{3}$ avec deux chiffres exacts.*

$$\pi = 3,141592\ldots,$$
$$\sqrt{3} = 1,732050\ldots$$

On voit immédiatement que $\pi\sqrt{3}$ est plus petit que 6 ; par conséquent l'erreur relative devra être par défaut et moindre que $\frac{1}{6.10^3}$. Il suffira donc que l'erreur relative de chaque facteur soit moindre que $\frac{1}{12.10^3}$ ou $\frac{1}{1,2\times10^3}$. Or en gardant les trois premiers chiffres de π l'erreur absolue est moindre que $\frac{2}{10^3}$, et l'erreur relative moindre que $\frac{2}{3.10^3}$; elle est donc moindre que $\frac{1}{1,2\times10^3}$ et il suffit de garder dans π les trois premiers chiffres. Dans $\sqrt{3}$ il faut garder les quatre premiers chiffres.

L'opération est

```
   1.732
   3,14
 -------
   6 928
  17 32
 519 6
 -------
 5,43848
```

Le nombre exact est compris entre 5,43848 et 5,44848 ; les deux premiers chiffres sont donc exacts.

Le théorème sur l'erreur relative d'un quotient étant le même que celui qui donne une limite supérieure de l'erreur relative d'un produit, on raisonnera de la même façon quand il s'agit de calculer un quotient avec une erreur relative moindre qu'un nombre donné ou avec un certain nombre de chiffres exacts.

191. Racine carrée. — Soit c le premier chiffre à gauche du nombre donné et supposons que nous gardions dans ce nombre les $m+1$ premiers chiffres, l'erreur relative sera alors par défaut et moindre que $\frac{1}{c.10^m}$. Celle de la

racine sera aussi par défaut et moindre que $\frac{1}{2c.10^m}$. Si donc $2c$ est supérieur au premier chiffre à gauche de la racine, celle-ci aura m chiffres exacts ; sinon on ne sera sûr que de $m-1$ chiffres.

Exemple. — *Calculer* $\sqrt[4]{3}$ *avec trois chiffres exacts.*

On a $$\sqrt[4]{3} = \sqrt{\sqrt{3}}$$

et $$\sqrt{3} = 1,732050\ldots$$

Comme $\sqrt{3}$ commence par 1, $\sqrt{\sqrt{3}}$ commence aussi par 1 et l'on a forcément $2c > 1$; il suffit de prendre quatre chiffres dans $\sqrt{3}$.

L'opération est

$$\begin{array}{r|l} 1,7320 & 1,31 \\ \cline{2-2} 0,73 & 23 \\ 420 & 3 \\ \cline{2-2} & 261 \end{array}$$

et le résultat est 1,31.

Exemple. II. — *Calculer à un dix-millième près le nombre*

$$x = \sqrt{\frac{9 \times 25}{22}}.$$

Le nombre x est compris entre 3 et 4 ; donc l'erreur relative devra être moindre que $\frac{1}{3.10^4}$, et, par suite, celle sur le nombre soumis au radical moindre que $\frac{2}{3.10^4}$ ou $\frac{1}{1,5 \times 10^4}$.

D'autre part, on a

$$\frac{9 \times 25}{22} = 10,22727\ldots,$$

et si on garde les quatre premiers chiffres décimaux l'erreur absolue est moindre que $\frac{1}{10^4}$ et l'erreur relative moindre que $\frac{1}{10^8}$ et, par défaut, comme la précédente.

L'opération effectuée donne le résultat

$$3{,}1979\ldots;$$

le nombre cherché est donc compris entre 3,1979... et 3,1980... Par conséquent le nombre 3,1980 est approché du nombre exact à moins de $\frac{1}{10^4}$, mais sans qu'on sache dans quel sens.

EXERCICES

1° En désignant par π le nombre indéfini 3,1415926, calculer la racine carrée approchée par excès de $\frac{1}{\pi}$, à moins de $\frac{1}{1000}$.

2° Calculer avec 5 décimales exactes le nombre $\frac{\pi^2-1}{\pi}$. Quelle erreur commet-on, en ne gardant du développement de π que les trois premières décimales ?

3° Calculer $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ avec deux décimales exactes.

4° On donne trois nombres a, b, c avec un nombre illimité de décimales, et on prend de a et b les valeurs approchées par défaut, à $\frac{1}{10000}$ près, de c la valeur approchée par excès à $\frac{1}{10000}$ près. Quelle erreur commet-on sur le nombre $\frac{ab}{c}$, sachant que a est compris entre 5 et 6, b entre 2 et 3 et c entre 7 et 8 ?

5° On pose $a = 2{,}71856\ldots$, $b = 1{,}605043\ldots$, $x = 0{,}04271\ldots$ Calculer $y = ax + b$ à $\frac{1}{1000}$ près.

6° Dans les mêmes hypothèses que précédemment, calculer $y = ax^2 + bx$ à $\frac{1}{1000}$ près.

7° Dans les mêmes hypothèses, calculer $y = \frac{ax+1}{x+b}$, avec 3 décimales exactes.

8° Calculer la somme

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2\ldots\ldots n} + \ldots\ldots,$$

avec 7 décimales exactes, sachant que lorsqu'on s'arrête au terme $\frac{1}{1.2\ldots\ldots n}$, l'erreur commise en négligeant les termes qui suivent est moindre que $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1.2\ldots\ldots n}$.

CHAPITRE II

PROBLÈMES ET THÉORÈMES

EXEMPLES DE SOLUTIONS

192. I. — *Trouver le nombre des chiffres contenus dans les* 10 350 000 *premiers nombres, et trouver combien ces nombres contiennent de fois le chiffre* 0.

Parmi tous ces nombres, il y a

9	nombres	d'un	seul	chiffre,
90	id.	de	2	chiffres,
900	id.	id.	3	id. ,
9000	id.	id.	4	id. ,
90000	id.	id.	5	id. ,
900000	id.	id.	6	id. ,
9000000	id.	id.	7	id. ;

enfin depuis le nombre 10000000 jusqu'au nombre 10 350000, ces deux nombres compris, il y a 350001 nombres de 8 chiffres.

Le nombre total des chiffres est donc

$$9+90\times 2+900\times 3+9000\times 4+90000\times 5+900000\times 6$$
$$+9000000\times 7+350001\times 8$$
$$=9(1+20+300+4000+50000+600000+7000000)$$
$$+350.001\times 8$$
$$=9\times 7654321+350001\times 8=71688897.$$

Tel est le nombre total des chiffres contenus dans les nombres indiqués.

Pour traiter la seconde partie de la question, nous cher-

cherons d'abord le nombre des zéros contenus dans les 9999999 premiers nombres, puis le nombre des zéros contenus dans les 350001 nombres qui suivent.

La première partie se résout aisément en écrivant tous les nombres depuis 0 jusqu'à 9999999 avec 7 chiffres, c'est-à-dire en complétant chacun d'eux par des zéros placés sur la gauche ; nous aurons ainsi la suite

0000000, 0000001, 0000002, ..., 9999999.

Il est évident que, dans cette suite, chacun des chiffres 0, 1, 2, ..., 9, entre le même nombre de fois ; or, 10000000 de nombres de 7 chiffres contiennent 70000000 de chiffres, et, comme il y a 10 chiffres en tout, chacun d'eux entre 7 000 000 de fois dans les nombres indiqués et écrits comme nous l'avons dit.

Seulement, en agissant ainsi, nous avons ajouté un grand nombre de zéros, sur la gauche des nombres, et qu'il faut enlever du nombre total. D'ailleurs, il est facile d'obtenir le nombre des autres chiffres, et en le retranchant du nombre des chiffres contenus dans les 9999999 premiers nombres, nous aurons le nombre des zéros.

En effet, notre manière de procéder n'altère pas le nombre de fois qu'un autre chiffre que zéro est contenu dans les nombres donnés ; il y a donc $7000000 \times 9 = 63000000$ de chiffres significatifs. Or nous avons vu que tous ces nombres contiennent $9 \times 7654321 = 68888889$ chiffres ; il y a donc en tout

$68888889 - 63000000 = 5888889$ fois le chiffre zéro.

Reste à trouver maintenant le nombre des zéros contenus dans les 350001 nombres depuis 10000000 jusqu'à 10350000.

De 10000000 jusqu'à 10099999, il y a 100000 nombres qui contiennent chacun deux zéros plus ceux des nombres de la suite 00000, 00001, 00002, ..., 99999 ; cela fait

$200000 + 50000 = 250000$ zéros.

De 10100000 à 10199999, il y a 100000 nombres qui contiennent chacun un zéro plus ceux des nombres de la suite que nous venons de signaler; cela fait

$$100000 + 50000 = 150000 \text{ zéros.}$$

De même il y a 150000 zéros dans les nombres depuis 10200000 jusqu'à 10299999.

La même marche montre que

de 10300000 à 10309999, il y a $20000 + 4000 = 24000$ zéros
de 10310000 à 10319999, id. $10000 + 4000 = 14000$ id.
de 10320000 à 10329999, id. $10000 + 4000 = 14000$ id.
de 10330000 à 10339999, id. $10000 + 4000 = 14000$ id.
de 10340000 à 10349999, id. $10000 + 4000 = 14000$ id.

Enfin le nombre 10350000 contient 5 zéros.

Il y a donc en tout

$$5888889 + 250000 + 150000 \times 2 + 24000 + 14000 \times 4 + 5 = 6508894 \text{ zéros.}$$

193. II. — *Un facteur rural fait* 30^{km} *par jour, et marche* 345 *jours de l'année, jours de congé et jours de maladie déduits. Trouver combien il fait de mètres en son année; combien il faut prononcer de mots pour lire tous les nombres depuis* 1 *jusqu'à celui que l'on obtient ainsi, et le temps qu'il faut pour les prononcer, sachant que l'on prononce environ* 185 *mots par minute, et admettant ce résultat comme exact.*

Ce facteur rural faisant 30^{km} par jour, fait

$$30 \times 345 = 10350^{km} \text{ en } 345 \text{ jours ;}$$

il fait donc 10350000^{m}.

La question est donc de trouver le nombre des mots qu'il faut prononcer pour énoncer tous les nombres depuis 1 jusqu'à 10350000 inclusivement.

Désignons, à cet effet, par A le nombre de mots qui figurent dans les noms des 999 premiers nombres ; pour obte-

nir le nombre de mots qui figurent dans les noms des nombres depuis 1000 jusqu'à 999999, nous remarquons que, sauf 1000, 2000, 3000, ..., 999000, tous les autres nombres de six chiffres (chaque nombre étant au besoin complété par des zéros placés sur sa gauche) sont formés par deux nombres de trois chiffres écrits l'un à côté de l'autre ; donc les noms des nombres de trois chiffres sont répétés 999 fois pour chaque tranche, ce qui donne déjà 2.999. A ; d'autre part, à chaque fois le nom mille est prononcé une fois, et cela a lieu autant de fois que l'on peut écrire deux tranches de trois chiffres, distinctes ou non, l'une à côté de l'autre, c'est-à-dire $\overline{999}^2$ fois ; mais pour les nombres 001001, 001002, ..., 001999, on ne dit pas un mille trois, par exemple, mais mille trois ; il y a donc pour chacun d'eux un mot à retrancher, c'est-à-dire en tout 999 mots. Enfin les nombres omis, 1000, 2000, ..., 999000, contiennent 999 fois le mot mille plus les A noms des nombres de la première tranche. On a donc pour le nombre total des noms depuis 1 jusqu'à 999999,

$$B = A + 2.999.A + \overline{999}^2 - 999 + 999 + A$$

ou

$$B = 2000A + \overline{999}^2.$$

Pour aller de un million à dix millions exclusivement, on répète 9 fois tous les noms précédents, puis il y a les 20 mots de un million, deux millions, ..., dix millions et enfin, pour chacun des autres nombres, deux mots, le mot million et un ou deux, ... jusqu'à neuf.

De 1 jusqu'à 10000000, il y a donc

$$B + 9B + 20 + 18.999999$$

mots à prononcer.

Reste à calculer le nombre des mots donnés par les nombres depuis 10000000 exclusivement jusqu'à 10350000 inclusivement : ce sont d'abord 350000 fois les deux mots dix millions plus les noms des 350000 premiers nombres ;

appelons C ce nombre de noms, nous aurons finalement

$$20000A + 10.\overline{999}^2 + 18000000 + 2 + 2.\ 350000 + C.$$

Il faut maintenant calculer A et C.

Le calcul de C se fait aisément en procédant d'une manière analogue à celle déjà employée ; on trouve ainsi

$$C = 350A + 1000(H - 1) + 349000 + 4,$$

en désignant par H le nombre des mots prononcés pour énoncer les nombres depuis 1 jusqu'à 349 inclusivement. Quant aux deux nombres A et H, ils sont faciles à obtenir par simple dénombrement ; on les obtient même très rapidement en tenant compte de la façon dont les nombres se déduisent les uns des autres. On trouve

$$A = 3720 ; \qquad H = 1085 ;$$

d'où l'on déduit $C = 2735004$.

Il est facile d'achever maintenant les calculs, et l'on trouve pour le nombre cherché

$$105815016.$$

Si l'on veut le temps employé à prononcer tous ces mots, à raison de 185 par minute, il n'y a qu'à diviser le nombre trouvé par 185 ; on obtient ainsi 571973 minutes.

Or 60^m valant une heure, le temps précédent évalué en heures est le nombre de fois que le nombre trouvé contient 60, c'est-à-dire

9532 heures, et il reste 53^m.

En admettant qu'une personne se voue à cette tâche et y consacre 8 heures par jour, elle mettrait 1191 jours et demi.

194. III. — *A l'exception des nombres premiers et des nombres simplement pairs, tout nombre entier est égal à une somme de nombres impairs consécutifs.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de chercher la

forme d'nn nombre qui est la somme de nombres impairs consécutifs.

Soit une suite de pareils nombres

$$2k+1, \quad 2k+3, \ldots\ldots, 2k+2p+1,$$

cette suite contenant $p+1$ nombres ; nous supposons, bien entendu, p au moins égal à 1. Pour avoir la somme de ces nombres, il suffit de remarquer qu'en parcourant la suite de gauche à droite, les nombres augmentent de deux unités à chaque fois, et qu'en la parcourant de droite à gauche, ils diminuent de deux unités à chaque fois ; si donc on écrit deux fois cette suite, une fois dans l'ordre indiqué et une fois dans l'ordre inverse, de façon que les nombres de même rang soient les uns au-dessous des autres, nous voyons que la somme des deux nombres placés l'un au-dessus de l'autre est toujours la même. Mais en formant la somme de ces sommes partielles, toutes égales d'ailleurs, nous obtenons deux fois la somme demandée et autant de fois la somme des termes extrêmes de la première suite qu'il y a de nombres dans cette suite, c'est-à-dire $p+1$ fois la somme $4k+2p+2$.

Nous avons donc finalement pour somme

$$S = (2k+p+1)(p+1).$$

Le nombre S ainsi obtenu est donc nécessairement un produit de deux facteurs ; ces deux facteurs ont d'ailleurs la même parité, car leur différence est paire ; si donc l'un d'eux est divisible par 2, l'autre l'est aussi. Par conséquent, nous ne trouverons de cette façon ni nombres premiers, ni nombres simplement pairs.

Cela posé, considérons un nombre impair quelconque, mais non premier ; ce nombre est le produit de deux facteurs impairs, égaux ou inégaux, dont aucun n'est moindre que 3. Égalons le plus petit de ces facteurs, ou l'un quelconque d'entre eux s'ils sont égaux, à $p+1$, et l'autre, à $2k+p+1$; nous aurons ainsi les deux nombres en-

tiers p et k ; la suite que nous cherchons sera parfaitement déterminée.

Considérons maintenant un nombre divisible par 4, et décomposons-le en un produit de deux facteurs pairs tous deux, égaux ou inégaux ; il suffit alors de procéder comme précédemment pour trouver la suite de nombres impairs consécutifs dont il est la somme.

D'ailleurs un multiple de 4 est de la forme $4n$, et il est visiblement la somme des deux nombres impairs consécutifs, $2n-1$ et $2n+1$.

Remarque. — Pour un nombre donné, il peut y avoir plusieurs modes de décomposition de ce genre ; la méthode indiquée les donne tous. — Si le nombre donné est carré parfait, les deux facteurs peuvent être pris égaux, et l'on a $k=0$, ce qui veut dire que la suite des nombres impairs considérée commence à 1. On retrouve ainsi une propriété connue.

195. IV. — *Soient deux nombres premiers entre eux,* a *et* b ; *on considère les deux nombres*

$$11a+2b \quad \text{et} \quad 18a+5b\ ;$$

montrer :

1° *Que si l'un d'eux est divisible par* 19, *l'autre est aussi divisible par* 19 ;

2° *Qu'ils ne peuvent pas avoir d'autre facteur commun que* 19.

Désignons par α et β les deux nombres proposés ; nous avons, par hypothèse,

$$\alpha = 11a+2b \quad \text{et} \quad \beta = 18a+5b\ ;$$

mais il est visible que

$$19a+5b-\beta = a\ ;$$

si nous remplaçons a par cette valeur dans α, nous obtenons

$$\alpha = 11(19a+5b-\beta)+2b,$$
$$\alpha = 11.19a+57b-11\beta\ ;$$

cette égalité nous montre que si β est divisible par 19, les trois parties du second membre sont divisibles par 19, et, par suite, α est un multiple de 19. On peut d'ailleurs tirer de là 11β et en déduire que ce nombre est divisible par 19 si α est un multiple de 19 ; mais si 11β est divisible par 19, β est divisible par 19. La première partie est donc établie.

Il y a d'autres manières d'établir ce résultat : par exemple, il n'y a qu'à se servir de l'égalité

$$7\alpha + \beta = 19(5a + b).$$

2° Supposons maintenant que les deux nombres α et β aient un diviseur commun autre que 19 ; alors de l'égalité

$$\alpha + 11\beta = 19(11a + 3b),$$

il résulte que ce facteur divise aussi $11a + 3b$; divisant $11a + 3b$ et $11a + 2b$, il divise leur différence, b ; il divise donc aussi

$$\alpha - 2b = 11a \qquad \text{et} \qquad \beta - 5b = 18a\,;$$

par suite il divise leur différence $7a$, puis $11a - 7a = 4a$, puis $7a - 4a = 3a$, enfin $4a - 3a = a$.

Or ce résultat est en contradiction avec les hypothèses, puisque les nombres a et b sont premiers entre eux ; donc les deux nombres α et β ne peuvent pas avoir de diviseur commun autre que 19.

193. V. — *Faire la somme des fractions*

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5}.$$

Généraliser.

Si l'on remarque que la fraction $\dfrac{1}{p(p+1)}$ peut s'écrire $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$, on obtient immédiatement

$$\frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\quad \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},\quad \frac{1}{4.5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}.$$

En ajoutant ces diverses égalités membre à membre, et observant que dans le second membre les frations $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ s'ajoutent et se retranchent et par suite disparaissent, l'on obtient

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}=1-\frac{1}{5}.$$

Considérons alors la somme

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)},$$

dans laquelle n désigne un nombre entier quelconque ; nous montrerons absolument comme dans le cas précédent que cette somme a pour valeur $1-\frac{1}{n+1}$. D'ailleurs le nombre $\frac{1}{n+1}$ peut devenir aussi petit que l'on veut quand n grandit indéfiniment ; il en résulte donc que la somme précédente a pour limite 1, quand le nombre des fractions croît sans fin.

197. VI. — *Montrer que la somme*

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$$

donne naissance à une fraction décimale périodique mixte. Généraliser ce résultat.

Si nous réduisons ces trois fractions au même dénominateur, nous pouvons écrire ainsi la somme envisagée :

$$\frac{(n+1)(n+2)+n(n+2)+n(n+1)}{n(n+1)(n+2)}.$$

Or parmi les trois nombres n, $n+1$ et $n+2$, il y en a un qui est divisible par 3 et un seul ; le dénominateur est donc divisible par 3 ; quant au numérateur, il contient trois termes dont deux sont divisibles par 3 et un non divisible par 3 ; il n'est donc pas divisible par 3. De même

parmi ces nombres, il y en a certainement un qui est pair, ou deux. Si un seul est pair, c'est le nombre $n+1$, et un raisonnement complètement semblable au précédent montre que le dénominateur est divisible par 2 et que le numérateur ne contient pas ce facteur; si deux de ces nombres sont pairs, ce sont n et $n+2$; alors en réunissant le premier et le dernier terme du numérateur, la somme proposée peut s'écrire ainsi :

$$\frac{2(n+1)^2+n(n+2)}{n(n+1)(n+2)},$$

et, sous cette forme, il est visible que le dénominateur contient au moins deux fois le facteur 2, tandis que le numérateur ne le contient qu'une fois. Donc, dans tous les cas, quelles que soient les simplifications qui se produisent, la fraction irréductible équivalente à celle qui précède contient au dénominateur, au moins une fois, chacun des facteurs 2 et 3; par suite elle donne naissance à une fraction décimale périodique mixte.

Pour généraliser ce résultat, considérons la somme

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots\ldots+\frac{1}{n+p-1},$$

dans laquelle p désigne un nombre premier quelconque et n un nombre entier quelconque. Les dénominateurs n, $n+1, \ldots, n+p-1$, sont p nombres entiers consécutifs; il y en a donc un et un seul qui contient le facteur premier p. Cela posé, réduisons toutes ces fractions au même dénominateur et effectuons leur somme; nous obtiendrons

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+p-1)+n(n+2)\ldots\ldots(n+p-1)+\ldots\ldots\\ \ldots\ldots+n(n+1)\ldots\ldots(n+p-2)\end{array}\right.}{n(n+1)\ldots\ldots(n+p-1)}.$$

Il résulte de ce qui précède, que le dénominateur de cette fraction est divisible par p; quant au numérateur, c'est la somme des produits $p-1$ à $p-1$ des nombres n, $n+1, \ldots, n+p-1$; l'un de ces produits et un seul ne

contient pas le nombre qui est divisible par p; donc toutes les parties du numérateur, sauf une, sont divisibles par p, et, par suite, le numérateur n'est pas divisible par p.

D'autre part, les nombres qui figurent au dénominateur commun sont pairs de deux en deux; parmi ceux-ci, les nombres situés de deux en deux sont divisibles par 4; parmi ceux-ci, les nombres situés de deux en deux sont divisibles par 8; et ainsi de suite. On finit par trouver un seul nombre pair qui contient une puissance de 2 supérieure à toutes les autres (*); soient 2^h cette puissance et 2^k la puissance de 2 qui est en facteur au dénominateur. Chaque terme du numérateur contient au moins 2^{k-h} en facteur, et, en supprimant ce facteur haut et bas, il reste 2^h au dénominateur, tandis que le numérateur, se composant de termes tous pairs, sauf un, ne contient plus le facteur 2.

La fraction irréductible équivalente à la fraction étudiée contient donc au dénominateur les facteurs premiers 2 et p; donc elle donne naissance à une fraction décimale périodique mixte.

Le raisonnement actuel n'est pas applicable aux deux cas où l'on a $p = 2$ ou bien $p = 5$.

— Dans le cas de $p = 2$, on a à étudier la somme $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$, ou $\frac{2n+1}{n(n+1)}$; ce nombre fractionnaire est toujours irréductible, car les facteurs premiers de n, pas plus que ceux de $n+1$, n'appartiennent à $2n+1$.

D'ailleurs l'un des deux nombres n et $n+1$ est pair; le facteur 2 appartient donc au dénominateur. Si n est différent de 1, l'un des deux nombres n et $n+1$ admet un autre facteur premier que 2; si ce facteur est autre que 5, la fraction décimale obtenue est périodique mixte. Suppo-

(*) Le procédé d'exclusion employé peut conduire à deux nombres divisibles par la même puissance de 2; alors l'un des deux contient en facteur la puissance immédiatement supérieure.

sons que ce facteur soit 5, c'est-à-dire que n ou $n+1$ soit une puissance de 5, d'abord n; alors les deux derniers chiffres à droite de ce nombre forment le nombre 25; ceux de $n+1$ forment le nombre 26; ce dernier nombre n'est pas divisible par 4; donc le nombre $n+1$, qui ne contient pas le facteur 5, contient au moins un autre facteur premier que 2; par conséquent la fraction décimale obtenue en développant $\frac{2n+1}{n(n+1)}$ est périodique mixte. Il est vrai que ce raisonnement ne s'applique pas au cas de $n=5$; mais alors on a la fraction $\frac{11}{5.6}$ qui donne naissance à une fraction décimale périodique mixte. Supposons, en second lieu, que ce soit $n+1$ qui soit une puissance de 5; alors, sauf le cas de $n+1=5$, le nombre $n+1$ est terminé par 25, et le nombre n par 24; comme il y a des puissances de 2 terminées par 24, cette considération ne peut nous renseigner. Mais, dans ce cas le nombre n est de l'une des deux formes $5^{2k+1}-1$, $5^{2k}-1$, k étant au moins égal à 1; dans le premier cas, le nombre n est divisible par $5-1$ ou 4, et le quotient est impair; n admet donc d'autres facteurs premiers que 2 et 5; dans le second cas, n est divisible par 5^2-1 ou 24, et admet le facteur 3. Dans tous les cas signalés, la fraction $\frac{2n+1}{n(n+1)}$ donne naissance à une fraction décimale périodique mixte. Si $n+1=5$, on a $n=4$; la fraction devient $\frac{9}{20}$ et donne une fraction décimale limitée, 0,45.

Enfin si $n=1$, on a la fraction $\frac{3}{2}$ qui donne encore un nombre fractionnaire limité, 1,5.

Examinons maintenant le cas de $p=5$; nous avons alors à étudier la somme

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}.$$

Un des 5 nombres n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$,

est divisible par 5, et un seul de ces nombres jouit de cette propriété; il en résulte donc, par un raisonnement complètement semblable à celui déjà fait, que si l'on réduit les cinq fractions au même dénominateur et qu'ensuite on les ajoute, la fraction irréductible égale à cette somme contiendra au dénominateur le facteur 5. D'autre part, si l'on considère 5 nombres consécutifs qui ne commencent ni par 1, ni par 2, ces nombres contiennent d'autres facteurs premiers que 2, 3 et 5, c'est-à-dire que l'un d'eux admet un facteur premier supérieur à 5 (*); ce nombre est, du reste, seul, puisque la suite ne contient que cinq nombres. Le raisonnement est facile à achever et, sauf pour $n = 1$ ou $n = 2$, la somme envisagée donne naissance à une fraction décimale périodique mixte,

Si $n = 1$, on a la somme

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5},$$

qui donne le nombre décimal périodique mixte 2,28333 ....

Si $n = 2$, on a la somme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},$$

qui donne un nombre décimal limité 1,45.

198. VII. — *Trouver quatre nombres entiers consécutifs connaissant la somme de leurs carrés.*

Désignons par A la somme donnée et par x le plus petit des quatre nombres; les trois autres nombres seront représentés par $x+1$, $x+2$, $x+3$. Les carrés des quatre nombres sont donc représentés par x^2, x^2+2x+1,

(*) Supposons, par exemple, les nombres terminés par 0, 1, 2, 3, 4; le premier est divisible par 5; le second et le quatrième n'ont ni le facteur 2, ni le facteur 5; d'ailleurs, ils diffèrent de deux unités et l'un d'eux n'est pas divisible par 3; l'un d'eux contient donc un autre facteur premier que 2, 3, 5.

x^2+4x+4, x^2+6x+9, et leur somme par $4x^2+12x+14$. En égalant cette somme à A, on obtient l'égalité suivante :

$$4x^2+12x+14 = A.$$

Cette égalité nous montre que A doit être divisible par 2 et que l'on a, en divisant les deux membres par 2,

$$2x^2+6x+7 = \frac{A}{2}$$

ou
$$2(x+1)^2+2(x+1)+3 = \frac{A}{2};$$

de là on déduit

$$2(x+1)^2+2(x+1) = \frac{A}{2}-3;$$

le nombre entier $\frac{A}{2}-3$ doit donc encore être divisible par 2. En désignant ce nombre par 2B, on a donc finalement

$$(x+1)^2+(x+1) = B.$$

Cette égalité entraîne immédiatement la double inégalité

$$(x+1)^2 < B < (x+2)^2;$$

par suite, le second nombre, $x+1$, est la racine carrée à une unité près du nombre B.

On a donc à faire les opérations suivantes, qui doivent être toutes possibles : diviser par 2 le nombre donné et retrancher 3 du résultat; diviser ce nouveau nombre par 2 et extraire la racine carrée du quotient à une unité près. D'après l'égalité $(x+1)^2+(x+1) = B$, le reste obtenu doit être égal à la racine.

Si toutes ces conditions sont remplies, le problème est possible et résolu : on a obtenu le second des quatre nombres cherchés ; sinon le problème est impossible.

Exemple. — $A = 630$, $\frac{A}{2} = 315$, $\frac{A}{2}-3 = 312$; donc $B = 156$.

La racine carrée à une unité près est 12 et le reste 12. Le problème est donc possible et les quatre nombres sont

11, 12, 13, 14.

119. VIII. — *Trouver deux nombres connaissant la somme de leurs cubes et sachant qu'ils diffèrent entre eux de deux unités.*

Désignons par x le plus petit des deux nombres ; l'autre nombre sera $x+2$; les cubes de ces nombres sont représentés par x^3 et $(x+2)^3$ ou $x^3+6x^2+12x+8$. Si donc nous désignons par A la somme donnée de ces deux nombres, nous aurons

$$2x^3+6x^2+12x+8 = \mathrm{A}.$$

Cette égalité nous montre que A doit être divisible par 2, et qu'alors on a

$$(x+1)^3+3(x+1) = \frac{\mathrm{A}}{2}.$$

Or le premier membre est plus grand que $(x+1)^3$ et il est moindre que $(x+2)^3$ ou $(x+1+1)^3$, puisque l'on a

$$[(x+1)+1]^3 = (x+1)^3+3(x+1)^2+3(x+1)+1.$$

Le nombre $\frac{\mathrm{A}}{2}$ est donc compris entre $(x+1)^3$ et $(x+2)^3$, et la double inégalité

$$(x+1)^3 < \frac{\mathrm{A}}{2} < (x+2)^3$$

nous montre que $x+1$ est la racine cubique à une unité près de $\frac{\mathrm{A}}{2}$. Le reste est le triple de la racine, d'après l'égalité qui donne $x+1$.

En définitive, on est conduit aux opérations suivantes, qui doivent être toutes possibles, dans les conditions indiquées : on divise par 2 le nombre donné, on extrait la racine cubique à une unité près du quotient ainsi obtenu, et l'on obtient le nombre compris entre les deux nombres

donnés, si le reste de l'opération est le triple de la racine ; sinon, le problème est impossible.

Exemple. — $A = 221472$; on a $\frac{A}{2} = 110736$. La racine cubique à une unité près de ce nombre est 48 et le reste 144 ; comme on a

$$144 = 48 \times 3,$$

le problème est possible et les deux nombres demandés sont 47 et 49.

CHAPITRE III

SYSTÈME MÉTRIQUE DÉCIMAL

200. On appelle *système métrique décimal* ou système légal des poids et mesures, l'ensemble des unités de mesure adoptées en France pour l'évaluation des grandeurs les plus usuelles.

Ce système est aujourd'hui le seul employé en France, en vertu des lois du 18 germinal an III et du 4 juillet 1837.

Nous avons à signaler les unités de mesure des longueurs, des aires ou surfaces, des volumes, des poids, des monnaies, des arcs de cercle et du temps.

Sauf pour les arcs de cercle et les temps, les unités d'une même espèce se déduisent les unes des autres par le procédé employé dans la numération décimale : de l'une d'elles, regardée comme unité principale, on déduit des unités d'ordres supérieurs, 10, 100, 1000, ... fois plus grandes, que l'on nomme en faisant précéder le nom de l'unité principale des mots *déca*, *hecto*, *kilo*, ... ; puis on forme des unités 10, 100, 1000, ... fois plus petites que l'unité principale, que l'on nomme en faisant précéder le nom de celle-ci des mots *déci*, *centi*, *milli*, ... (*).

La loi de formation des unités employées dans le système métrique est donc la même que celle employée dans le système décimal pour la formation des nombres.

L'unité fondamentale du système métrique est l'unité de

(*) Ces règles ne sont pas absolues cependant : nous verrons quelques exceptions plus tard.

longueur, le *mètre :* de celle-ci, comme nous le verrons dans la suite, dérivent simplement toutes les autres.

Le mètre est la quarante-millionième partie de la longueur du méridien terrestre. Un mètre-type en platine ou *étalon* fut construit et déposé aux Archives le 4 messidor an VII ; il fixe la longueur légale du mètre. Les mesures géodésiques modernes ont donné pour le méridien terrestre moyen une longueur plus grande que celle qui fut adoptée à cette époque, et la quarante-millionième partie de la longueur actuellement admise pour le méridien terrestre surpasse le mètre légal de $\frac{2}{100000}$ environ.

Le mètre exprimé à l'aide des unités anciennes de longueur vaut 3 pieds, 11 lignes, 296 millièmes de ligne, ou 0,513074 de toise.

201. Mesures de longueurs. — L'unité de longueur est le mètre.

Les autres unités sont :

Le *décamètre*,	qui vaut	10	mètres	(*)
L'*hectomètre*,	id.	100	id.	
Le *kilomètre*,	id.	1000	id.	
Le *myriamètre*,	id.	10000	id.	
Le *décimètre*,	qui vaut	$\frac{1}{10}$	de mètre	
Le *centimètre*,	id.	$\frac{1}{100}$	id.	
Le *millimètre*,	id.	$\frac{1}{1000}$	id.	

Les petites unités, mètre et fractions du mètre, sont employées pour mesurer les petites longueurs : pièces

(*) Abréviations : *m*, mètre, *Dm*, *Hm*, *Km*, *Mm*, décamètre, hectomètre, kilomètre, myriamètre ; *dm*, *cm*, *mm*, décimètre, centimètre, millimètre.

d'étoffe, dimensions de meubles, de parquet, de boiseriès, etc.

En physique, où l'on a besoin d'évaluer de très petites longueurs, des dixièmes et jusqu'à des centièmes de millimètre, on emploie des instruments spéciaux, tels que *verniers*, *vis micrométriques*, etc.

Le décamètre sert à mesurer les dimensions des propriétés privées : la chaîne d'arpenteur est un décamètre.

L'hectomètre, le kilomètre et le myriamètre servent à évaluer les longueurs des chemins : ce sont les *mesures itinéraires* dont on se sert actuellement.

Les anciennes mesures de longueur étaient la *toise*, le *pied*, le *pouce*, la *ligne* et les fractions décimales de la ligne (*).

Les grandes longueurs, les chemins, par exemple, s'évaluaient à l'aide des multiples de la toise, de la *lieue terrestre*, du *mille marin*, de la *lieue marine*.

La toise valait 6 pieds ; sa longueur en mètres et fractions du mètre est 1,94904.

Le pied valait 12 pouces ; sa longueur en mètres est 0,32484.

Le pouce valait 12 lignes ; sa longueur en mètres est 0,02707.

Enfin la ligne a pour longueur $0^m,002256$.

La lieue terrestre valait environ 4445^m ; aujourd'hui, dans le langage courant, la lieue désigne une longueur de 4^{km}.

Le mille marin vaut 1852^m, et la lieue marine, 5557^m, ou 3 milles marins.

Dans la marine, on emploie encore la *brasse*, qui vaut 5 pieds ou $1^m,624$; le *nœud*, qui est le $\frac{1}{120}$ du mille marin et qui vaut $15^m,435$; et l'*encâblure*, qui vaut 120 brasses ou $194^m,880$.

(*) Abréviations : *T*, *P*, *p*, *l*, toise, pied, pouce, ligne.

L'origine du nœud est facile à expliquer : on emploie, à la mer, pour mesurer la vitesse d'un navire, une ligne munie de nœuds en drap, distants les uns des autres de 15m,435 ; à l'extrémité de la ligne est attaché un triangle de bois lesté de plomb à sa base, de façon qu'il se tienne verticalement dans l'eau ; dans cette position, l'eau oppose à son mouvement une grande résistance, et il se tient sensiblement immobile, lorsque le remous du navire ne l'atteint plus ; on admet que ceci a lieu, quand il est à une distance du navire sensiblement égale à la longueur même du navire. On compte alors le nombre de nœuds qui passent en $\frac{1}{120}$ d'heure ou 30 secondes : autant il passe de nœuds dans cet intervalle, autant le navire parcourt de milles à l'heure. — Le triangle de bois dont on se sert pour cette opération s'appelle *loch*.

Table pour la conversion des toises, pieds, pouces et lignes en mètres et fractions décimales du mètre.

Toises	Mètres	Pieds	Mètres	Pouces	Mètres	Lignes	Millimètres
1	1,94904	1	0,32484	1	0,02707	1	2,256
2	3,89807	2	0,64968	2	0,05414	2	4,512
3	5,84711	3	0,97452	3	0,08121	3	6,767
4	7,79615	4	1,29936	4	0,10828	4	9,023
5	9,74518	5	1,62420	5	0,13535	5	11,279
6	11,69422	6	1,94904	6	0,16242	6	13,535
7	13,64326	7	2,27388	7	0,18949	7	15,791
8	15,59229	8	2,59872	8	0,21656	8	18,047
9	17,54133	9	2,92355	9	0,24363	9	20,302
10	19,49037	10	3,24839	10	0,27070	10	22,558
11	21,43940	11	3,57322	11	0,29777	11	24,814
12	23,38844	12	3,89807	12	0,32484	12	27,070

APPLICATIONS. — 1er EXEMPLE. — *Sachant que l'aune vaut 3 pieds 7 pouces 10 lignes, $\frac{5}{6}$, trouver la longueur de l'aune exprimée en mètres et fractions décimales du mètre.*

Il n'y a qu'à se reporter à la table précédente, pour écrire immédiatement les diverses parties de l'addition qui suit :

3 pieds	=	$0^m,97452$
7 pouces	=	0 ,18949
10 lignes	=	0 ,02255
$\frac{5}{6}$ de ligne	=	0 ,00188
Valeur de l'aune		$1^m,18844$

Pour avoir $\frac{5}{6}$ de ligne, nous avons divisé la valeur de 5 lignes, qui est dans la table précédente, par 6.

2e EXEMPLE. — *Convertir en mètres et fractions décimales du mètre 1954 toises 5 pieds 8 pouces 11 lignes.*

On a immédiatement, en se servant de la table précédente,

1000 toises	=	$1949^m,037$
900 id.	=	1754 ,133
50 id.	=	97 ,452
4 id.	=	7 ,796
5 pieds	=	1 ,624
8 pouces	=	0 ,216
11 lignes	=	0 ,024
Résultat		$3810^m,282$

202. **Mesures de surfaces.** — On prend toujours pour unité de surface le carré construit sur l'unité de longueur qui a été choisie : un *carré* est une figure dont les quatre côtés sont égaux et se coupent à angle droit.

Les unités de surface rangées par ordre de grandeurs décroissantes sont :

Le *myriamètre carré*, aire du carré dont le côté a un myriamètre de longueur ;

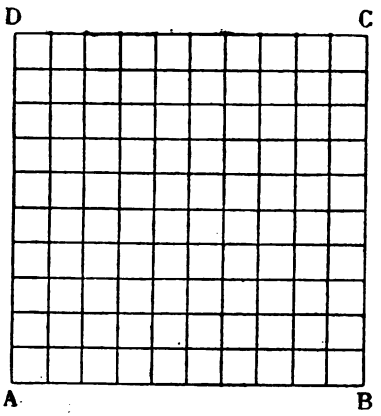
Le *kilomètre carré*, aire du carré dont le côté a un kilomètre de longueur ;

L'*hectomètre carré*, aire du carré dont le côté a un hectomètre de longueur ;

Puis, le *décamètre carré*, le *mètre carré*, le *décimètre carré*, le *centimètre carré*, le *millimètre carré* (*).

Chacune de ces unités est 100 *fois plus petite que celle qui la précède, et* 100 *fois plus grande que celle qui la suit.*

En effet, considérons deux unités consécutives dans l'énumération que nous venons de faire, par exemple le mètre carré et le décimètre carré, et soit ABCD un carré ayant un mètre de côté. Divisons alors chacun des côtés du carré en 10 parties égales, et par les points de division de l'un des côtés menons des parallèles à ceux de l'autre couple ; nous aurons formé ainsi dix rangées parallèles contenant chacune 10 carrés de un décimètre de côté ; donc le mètre carré vaut 100 décimètres carrés.



De même, le décamètre carré vaut 100 mètres carrés ; etc.

On voit donc qu'il ne faut pas confondre le dixième, le centième, etc. du mètre carré avec le décimètre carré, le centimètre carré, etc.

Le mètre carré et les unités inférieures servent à évaluer

(*) Abréviations : *mq*, mètre carré, *Dmq*, *Hmq*, *Kmq*, *Mmq*, décamètre carré, hectomètre carré, etc. ; *dmq*, *cmq*, *mmq*, décimètre carré, etc.

les petites surfaces, telles que la surface d'un plafond, d'un mur, d'une cour, l'emplacement d'une maison, etc.

Les grandes unités servent à évaluer les propriétés ou les étendues de provinces, de pays, etc.

Le décamètre carré et l'hectomètre carré servent plus particulièrement à la mesure des champs, des prés, des bois ; ce sont les *mesures agraires*. A ce point de vue, elles prennent d'autres noms : le décamètre carré forme un *are* ; l'hectomètre carré, un *hectare* ; l'hectare vaut 100 ares, l'are vaut 100 mètres carrés ou 100 *centiares*.

Les anciennes mesures de surface étaient les carrés construits sur les anciennes mesures de longueur : la *toise carrée*, le *pied carré*, le *pouce carré*, etc.

La toise carrée vaut 36 pieds carrés ; le pied carré vaut 144 pouces carrés ; le pouce carré vaut 144 lignes carrées.

Les mesures agraires étaient : la *perche des eaux et forêts*, carré de 22 pieds de côté ; l'*arpent des eaux et forêts*, qui valait 100 perches ; la *perche de Paris*, carré de 18 pieds de côté ; l'*arpent de Paris*, qui valait 100 perches de Paris.

Table pour la conversion des toises et pieds carrés en mètres carrés.

Toises carrées	Mètres carrés	Pieds carrés	Mètres carrés
1	3,7987	1	0,1055
2	7,5975	2	0,2110
3	11,3962	3	0,3166
4	15,1950	4	0,4221
5	18,9937	5	0,5276
6	22,7925	6	0,6331
7	26,5912	7	0,7386
8	30,3899	8	0,8442
9	34,1887	9	0,9497
10	37,9874	10	1,0552

APPLICATION. — *Trouver la valeur en mètres carrés de* 354 *toises carrées*, 27 *pieds carrés*, $\frac{5}{8}$.

Le tableau précédent nous fournit immédiatement les diverses parties de l'addition qui suit :

300	tois. car.	=	1139^{mq},62
50	—	=	189 ,94
4	—	=	15 ,19
20	pieds car.	=	2 ,11
7	—	=	0 ,74
$\frac{5}{8}$	—	=	0 ,06
	Résultat		1347^{mq},66

Table des mesures agraires exprimées en pieds carrés, toises carrées et mètres carrés.

	Pieds carrés	Toises car.	Mètres car.
Perche des eaux et forêts. .	484	13,44	51,07
Arpent des eaux et forêts. .	48400	1344,44	5107,20
Perche de Paris.	324	9	34,19
Arpent de Paris.	32400	900	3418,87
Are	947,7	26,32	100
Hectare	94768,2	2632,45	10000

APPLICATION. — *Convertir en hectares, ares et fractions décimales de l'are* 32 *arpents* 87 *perches*, $\frac{4}{5}$ (*Mesures des eaux et forêts*).

L'arpent des eaux et forêts valant 5107^{mq},20, 32 arpents valent

$$5107,20 \times 32 = 163530,40.$$

De même 87 perches des eaux et forêts valent

$$51,07 \times 87 = 4443,09.$$

Enfin $\frac{4}{5}$ de perche valent

$$\frac{51,07 \times 4}{5} = 40,85.$$

Donc le résultat en mètres carrés s'obtient en effectuant l'addition suivante :

	163530,40
	4443,09
	40,85
Résultat.	168014,34

Par conséquent le nombre demandé est :

16 hectares 80 ares 14 centiares, 34.

203. **Mesures de volumes.** — On prend toujours pour unité de volume le cube construit sur l'unité de longueur. On appelle *cube* une figure fermée dont la surface extérieure est formée de six carrés égaux : exemple, un dé à jouer.

Les unités de volume rangées par ordre de grandeurs décroissantes sont :

Le *myriamètre cube*, volume du cube dont le côté a un myriamètre de longueur;

Le *kilomètre cube*, volume du cube dont le côté a un kilomètre de longueur;

L'*hectomètre cube*, volume du cube dont le côté a un hectomètre de longueur;

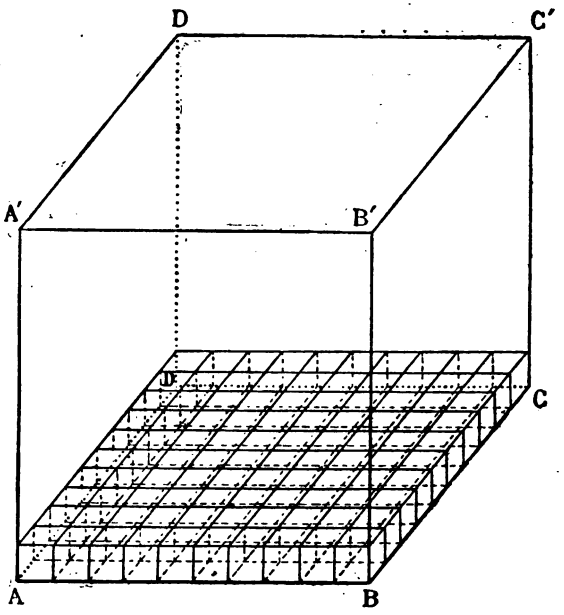
Puis, le *décamètre cube*, le *mètre cube*, le *décimètre cube*, le *centimètre cube* et le *millimètre cube* (*).

Chacune de ces unités est 1000 *fois plus petite que celle qui la précède et* 1000 *fois plus grande que celle qui la suit.*

En effet, prenons pour exemple le mètre cube et le décimètre cube et soit ABCDA'B'C'D' le cube ayant pour côté un

(*) Abréviations : *Mmc*, *Kmc*, *Hmc*, *Dmc*, *mc*, *dmc*, *cmc*, et *mmc*.

mètre; divisons le carré ABCD en 100 décimètres carrés, comme il a été fait antérieurement (n° 186); nous pouvons sur chacun de ces décimètres carrés placer un décimètre cube, et nous aurons ainsi une couche de 100 décimètres cubes et ayant pour hauteur un décimètre. Il est clair qu'il faudra superposer 10 rangées pareilles pour avoir un mètre cube; donc le mètre cube contient 10 fois 100 ou 1000 décimètres cubes.

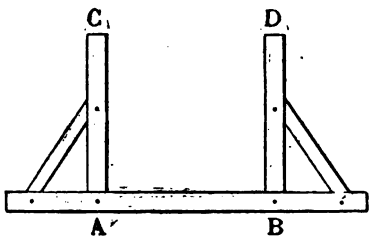


De même le décamètre cube vaut 1000 mètres cubes; etc... On voit donc qu'il ne faut pas confondre le dixième, le centième, etc... de mètre cube avec le décimètre cube, le centimètre cube, etc. Car, par exemple, un centième de mètre cube vaut 10 décimètres cubes.

Le mètre cube et ses sous-multiples sont les unités les

plus employées; quant aux grandes unités, le kilomètre cube, par exemple, on ne s'en sert que pour exprimer des volume énormes, comme ceux des planètes.

Les unités de volume sont couramment employées pour la mesure du bois de chauffage. Dans ce cas, le mètre cube prend le nom de *stère* : le stère usuel est un châssis en bois ou en fer composé de trois membrures de un mètre chacune ; l'une, AB, est horizontale; les deux autres, AC et BD, sont verticales.



Dans ce cadre prismatique, on empile des bûches de 1 mètre de longueur, jusqu'à ce que le volume indiqué soit rempli. Dans les coupes de bois, on procède même d'une façon plus primitive : on plante simplement deux pieux de 1 mètre de hauteur et distants l'un de l'autre de 1 mètre, ou bien, l'un à côté de l'autre, deux pieux pour figurer chacune des faces du stère. Il est rare d'ailleurs que l'on mesure, dans une coupe de bois, le bois débité en bûches de cette façon; on forme en réalité des parallélipipèdes rectangles dont la longueur, la hauteur et la largeur ne sont point égales à 1 mètre. Pour avoir le volume d'un tas de bois semblable, on multiplie, d'après les règles établies en géométrie, les trois nombres qui mesurent en mètres les dimensions du tas et alors on a le volume exprimé en stères.

Les autres unités de ce genre sont le *décastère*, qui vaut 10 stères, et le *décistère*, qui vaut $\frac{1}{10}$ de stère.

Lorsqu'il s'agit de mesurer le volume d'un liquide ou d'un tas de grains, les unités de volume prennent des noms nouveaux, et les multiples et sous-multiples de l'unité principale

sont formés d'après les lois de la numération. On les appelle alors des *mesures de capacité*.

L'unité de capacité fondamentale est le *litre*, qui vaut 1 décimètre cube, mais qui n'a pas nécessairement la forme d'un cube : la forme des mesures de capacité est en général cylindrique.

Quand le litre est destiné à la mesure des liquides, on lui donne la forme d'un cylindre de 172^{mm} de hauteur et de 86^{mm} de diamètre.

Quand il est destiné à mesurer les grains, le sel, etc., la hauteur et le diamètre valent tous deux $108^{mm},4$.

Les mesures supérieures au litre sont le *décalitre*, qui vaut 10 litres, et l'*hectolitre*, qui vaut 100 litres.

Les mesures inférieures au litre sont le *décilitre*, qui vaut $\frac{1}{10}$ de litre, et le *centilitre*, qui vaut $\frac{1}{100}$ de litre.

Le litre et les fractions du litre servent à mesurer les liquides ou les graines qu'on achète par petites portions, telles que le vin au détail, l'huile, le vinaigre, les haricots, les pois, les lentilles, etc.

Le décalitre, l'hectolitre servent à mesurer le blé, l'avoine, l'orge, le vin, etc.; on emploie même souvent dans les campagnes le *double décalitre* comme mesure intermédiaire.

Les anciennes mesures de volume s'obtenaient en construisant des cubes sur les unités de longueur adoptées alors.

La principale unité était la *toise cube*, volume d'un cube dont le côté a une toise de longueur; le *pied cube*; le *pouce cube*, etc. La toise cube vaut 216 pieds cubes; le pied cube 1728 pouces cubes, etc.

Table pour la conversion des toises et pieds cubes en mètres cubes.

Toises cubes	Mètres cubes	Pieds cubes	Mètres cubes
1	7,4039	1	0,03428
2	14,8078	2	0,06855
3	22,2117	3	0,10283
4	29,6156	4	0,13711
5	37,0195	5	0,17139
6	44,4233	6	0,20566
7	51,8272	7	0,23994
8	59,2311	8	0,27422
9	66,6350	9	0,30850
10	74,0389	10	0,34277

APPLICATION. — *Trouver la valeur en mètres cubes de* 85 *toises cubes*, 173 *pieds cubes*, $\frac{9}{11}$.

Le tableau précédent nous fournit immédiatement les diverses parties de l'addition qui suit :

80 toises cubes	=	592^{mc},311
5 id.	=	37 ,019
100 pieds cubes	=	3 ,428
70 id.	=	2 ,399
3 id.	=	0 ,103
$\frac{9}{11}$ de pied cube	=	0 ,028
Résultat :		635^{mc},288

Les mesures employées pour le bois de chauffage étaient la *corde*, qui avait 8 pieds de couche sur 4 de hauteur ; la longueur des bûches variait de 2 pieds à 4 pieds $\frac{1}{2}$; mais pour la *corde des eaux et forêts*, la longueur des bûches était

fixée à 3 pieds $\frac{1}{2}$. La corde est encore employée dans plusieurs départements, et la *voie*, qui vaut la moitié de la corde, est encore employée à Paris.

Voici les valeurs des diverses cordes en stères :

Si le bois a	2^{P},	la corde vaut	$2^{st},370$;
Id.	$2^{P}\frac{1}{2}$,	id.	$2^{st},963$;
Id.	3^{P},	id.	$3^{st},556$;
Id.	$3^{P}\frac{1}{2}$,	id.	$4^{st},148$;
Id.	4^{P},	id.	$4^{st},741$;
Id.	$4^{P}\frac{1}{2}$,	id.	$5^{st},333$.

La principale mesure de capacité était la *pinte de Paris;* elle vaut en litres 0,9313. Elle se divisait en deux *chopines.*

Puis venaient : la *velte*, valant 8 pintes ; le *muids de Bourgogne*, valant 36 veltes ou 288 pintes. Le muids se divisait en 2 *feuillettes*, et la feuillette en 2 *quartauts.* On emploie encore, dans plusieurs départements du centre, le *poinçon*, qui contient 228 litres.

Pour mesurer les grains, on employait le *boisseau de Paris*, qui vaut $13^{l},008697$, et qui se divisait en 16 *litrons*; le *setier*, qui valait 12 boisseaux, et le *muids* qui valait 12 setiers.

Le setier vaut $1^{Hl},560$.

5 setiers valent $7^{Hl},80$.

Application. — *Trouver la valeur en hectolitres de* 15 *muids de Bourgogne*, 23 *veltes*, 7 *pintes.*

Exprimons le nombre proposé en pintes :

15 muids valent	$288 \times 15 =$	4320 pintes
23 veltes valent	$8 \times 23 =$	184 id.
	7 pintes =	7 id.
Valeur en pintes		4511 pintes

Donc la valeur en litres est

$$0,9313 \times 4511 = 4201.$$

Le nombre proposé vaut alors

$$42^{\text{Hl}},01.$$

Conversion des hectolitres en setiers.

Hectolitres	Setiers	Hectolitres	Setiers
1	0,641	6	3,846
2	1,282	7	4,487
3	1,923	8	5,128
4	2,564	9	5,769
5	3,205	10	6,410

204. **Mesures de poids.** — L'unité de poids est le *gramme*. Les unités multiples se forment de la même manière que les multiples du mètre : il y a le *décagramme*, qui vaut 10 grammes; l'*hectogramme*, qui vaut 100 grammes; le *kilogramme*, qui vaut 1000 grammes; et le *myriagramme*, peu employé d'ailleurs, et qui vaut 10000 grammes.

Les sous-multiples du gramme sont le *décigramme*, qui vaut $\frac{1}{10}$ de gramme; le *centigramme*, qui vaut $\frac{1}{100}$ de gramme; et le *milligramme*, qui vaut $\frac{1}{1000}$ de gramme.

On emploie aussi les multiples par deux et les moitiés des diverses unités : il y a des poids de 2 grammes, de 2 hectogrammes, de 50 grammes, de 500 grammes, etc.

Quant à la manière dont on fait dériver les poids du mètre, elle est très simple. *Le kilogramme est le poids d'un décimètre cube d'eau distillée, dans le vide, et à la température de 4° centigrades.*

On a choisi de l'eau distillée, afin que l'eau employée

dans cette opération soit toujours une substance identique à elle-même. On pèse cette eau dans le vide, afin que l'influence variable de l'air sur le poids de cette eau soit éliminée. On prend l'eau à 4° centigrades, car c'est à cette température que l'eau est le plus condensée, c'est-à-dire qu'une même quantité d'eau occupe le moindre volume (*).

Comme toutes les conditions indiquées sont difficiles à réaliser, on a construit, une fois pour toutes, un *kilogramme étalon* en platine, en se rapprochant le plus possible des conditions imposées, et on a déposé ce corps aux Archives, le 4 messidor, an VII. C'est ainsi qu'on a fixé, en France, le poids légal du kilogramme.

Le gramme est donc le poids, dans le vide, d'un centimètre cube d'eau distillée, prise à 4° centigrades.

Le gramme et les poids inférieurs sont employés dans les pesées qui exigent une grande précision : en physique, en chimie, et en pharmacie ; chez les orfèvres, pour les métaux précieux.

Le kilogramme, l'hectogramme, le décagramme, et leurs multiples ou quotients par deux, sont employés pour les pesées ordinaires : chez le boucher, le boulanger, l'épicier, etc.

Pour indiquer de grands poids, on emploie le *quintal métrique*, qui vaut 100^{kg} ; le *tonneau* (**), qui vaut 1000^{kg}. Cette dernière unité est surtout employée pour évaluer le poids d'un navire ou son chargement.

L'ancienne et principale unité de poids était la *livre* ;

(*) En réalité, l'eau employée n'est point pesée dans le vide ; mais par des procédés que la physique apprend à connaître, on ramène ce poids à ce qu'il serait si la pesée pouvait s'effectuer dans le vide. En prenant l'eau à 4°, on fixe une température, ce qui est indispensable dans une définition de ce genre ; puis, si l'eau employée n'est pas tout à fait à cette température, son poids est altéré d'une façon insensible, car au voisinage du maximum de densité, le poids d'un volume déterminé de liquide varie très lentement.

(**) On dit aussi : une *tonne*.

celle-ci se divisait en 2 *marcs*, le marc en 8 *onces*, l'once en 8 *gros*, et le gros en 72 *grains*.

La livre vaut $0^{kg},48951$. Aujourd'hui on désigne ainsi ordinairement le $\frac{1}{2}$ kilogramme, qui se rapproche du reste beaucoup de l'ancienne livre.

Enfin le *quintal* valait 100 livres.

Table pour la conversion des anciens poids en nouveaux.

Livres	Kilogrammes
1	0,48951
2	0,97901
3	1,46852
4	1,95802
5	2,44753
6	2,93703
7	3,42654
8	3,91605
9	4,40555

Marcs	Kilogrammes
1	0,24475
2	0,48951
3	0,73426

Onces	Grammes
1	30,59
2	61,19
3	91,78
4	122,38
5	152,97
6	183,56
7	214,16

Gros	Grammes
1	3,82
2	7,65
3	11,47
4	15,30
5	19,12
6	22,94
7	26,77

Le grain vaut $0^{gr},053$.

Le quintal vaut $48^{kg},951$.

Application. — *Sachant que le kilogramme d'or fin vaut* $3444^{f},44$, *trouver la valeur d'un lingot d'or de* 1 *livre*, 5 *onces*, 3 *gros et* 65 *grains*.

Une livre vaut . . .	$0^{kg},48951$
5 onces valent . . .	0 ,15297
3 gros valent . . .	0 ,01147
65 grains valent . .	0 ,00344
Poids du lingot . .	$0^{kg},65739$

Or le kilogramme d'or vaut $3444^f,44$; donc le lingot en question vaut

$$3444^f,44 \times 0,65739 = 2264^f,34.$$

Dans le langage courant, on appelle *densité* d'un corps le poids d'un décimètre cube de ce corps, exprimé en kilogrammes.

Il résulte de là que pour avoir le poids d'un certain volume d'un corps déterminé, il suffit de multiplier la densité de ce corps par le volume exprimé en décimètres cubes.

Enfin, dans le commerce des pierres précieuses, on se sert d'une unité de poids spéciale, qu'on appelle le *carat*. Le carat vaut, en France, $0^{gr},2059$.

205. Monnaies.— L'unité de monnaies française est le *franc;* le franc est la valeur légale d'une pièce d'argent qui pèse 5 grammes et qui contient $\frac{835}{1000}$ d'argent et $\frac{165}{1000}$ de cuivre.

Au moment où l'unité de monnaie fut fixée, cette pièce était au titre de 0,9, c'est-à-dire contenait $\frac{9}{10}$ d'argent et $\frac{1}{10}$ de cuivre. En outre, l'or valait, à poids égal, 15,5 fois la valeur de l'argent. Aujourd'hui, la proportion a augmenté en faveur de l'or, et, comme l'or est la base des échanges internationaux, il s'ensuit que la valeur réelle de l'argent a baissé : ce n'est que conventionnellement que les pièces d'argent ont gardé en France la valeur qui leur a été fixée par la loi.

L'unité monétaire a été fixée par la loi du 18 germinal

an III (7 avril 1795). La loi du 28 thermidor an III porte que l'unité monétaire conserve le nom de franc; que le titre de la monnaie d'argent sera de 9 parties de ce métal pur et d'une partie d'un autre métal ; que la pièce de 1 franc pèsera 5 grammes, celle de 2 francs, 10 grammes, et celle de 5 francs, 25 grammes.

On voit donc que les valeurs et les poids de ces pièces de monnaies sont fixés conformément aux principes du système décimal, puisque ces valeurs sont les multiples du franc par 2 et par 5, les seuls facteurs de 10, et que les poids sont des sous-multiples de 10 et de 100.

Plus tard, la loi du 7 germinal an XI (28 mars 1803) ordonne en outre de frapper des pièces d'or de 20 francs dont il y ait 155 au kilogramme ; ceci donne bien 15,5 pour le rapport des valeurs de deux poids égaux d'or et d'argent.

On ne fabrique pas les pièces d'or ni les pièces d'argent avec du métal précieux pur parce qu'on a remarqué qu'en alliant ces métaux avec du cuivre, on obtient des pièces plus dures et qui s'usent moins vite.

On appelle alors *titre* d'un objet d'or ou d'argent le rapport du poids du métal précieux contenu dans l'objet au poids total.

Exemple : Si on fond ensemble 835 grammes d'argent et 165 de cuivre, l'alliage obtenu est au titre de 0,835.

Les pièces d'or sont au titre de 0,900 ; les pièces de 5 francs en argent sont au titre de 0,900 aussi. Mais, d'après une loi du 25 mai 1864, complétée par une autre loi du 14 juillet 1866, les pièces d'argent qui valent moins de 5 francs sont au titre de 0,835.

Enfin il y a des monnaies de bronze, pour représenter les petites fractions du franc.

Les pièces qui ont été frappées depuis 1866 sont :

Or		Argent		Bronze	
La pièce de	100fr	La pièce de	5fr	La pièce de	0fr,10
Id.	50fr	Id.	2fr	Id.	0fr,05
Id.	20fr	Id.	1fr	Id.	0fr,02
Id.	10fr	Id.	0fr,50	Id.	0fr,01
Id.	5fr	Id.	0fr,20		

Ces monnaies sont toutes décimales ; les vrais sous-multiples du franc sont le *décime*, qui vaut $\frac{1}{10}$ de franc, et le *centime*, qui vaut $\frac{1}{100}$ de franc.

Les pièces de bronze se nomment : *pièce de* 10 *centimes*, *pièce de* 5 *centimes*, de 2 *centimes* et de 1 *centime* : les petites pièces d'argent portent des noms analogues : il y a la *pièce de* 20 *centimes* et la *pièce de* 50 *centimes*.

Les pièces fondamentales, qui se déduisent les unes des autres d'après les principes du système décimal, sont : les pièces de 100 francs, de 10 francs, de 1 franc, de 10 centimes et de 1 centime. Puis il y a, sauf pour la pièce de 1 centime, les quotients par 2 et par 5.

Un certain nombre de pièces ont été retirées de la circulation : ce sont les pièces d'argent de 25 centimes, de 75 centimes et de 1f,50, qui ne sont pas décimales, et la pièce d'or de 40f qui n'est pas décimale non plus.

D'ailleurs, sans qu'aucune loi soit intervenue, l'État ne fabrique plus de pièces de 20 centimes, ni de pièces d'or de 5f, et la frappe des pièces d'argent en général a été arrêtée : pendant l'année 1890, il n'a été fabriqué aucune pièce d'argent.

Une convention monétaire fut conclue entre la France, la Belgique, l'Italie et la Suisse, le 23 décembre 1865 ; la Grèce y adhéra en 1868 ; cette convention reçut son exécu-

tion du 1er août 1866 au 31 décembre 1879. Une nouvelle convention fut conclue le 5 novembre 1878 entre les mêmes États ; elle a été en vigueur du 1er janvier 1880 au 31 décembre 1885.

Enfin, une autre convention a été conclue à la date du 6 novembre 1885 entre la France, l'Italie, la Grèce et la Suisse ; la Belgique a adhéré à cet arrangement le 30 décembre 1885, et depuis le 1er janvier 1886 les dispositions de cet acte sont en vigueur.

D'après cette convention, les cinq États désignés antérieurement frappent des pièces d'or et d'argent au même titre, au même poids et au même diamètre ; la monnaie de chacun de ces États a cours dans les quatre autres, et même les pièces de 5 francs sont reçues dans les caisses publiques au même titre que la monnaie d'or.

Nous donnons ci-dessous un tableau dans lequel se trouvent indiquées les pièces d'or fabriquées par les cinq États, ainsi que leurs poids, leur titre, les tolérances admises sur le titre et sur le poids, et leurs diamètres.

Nature des pièces		TITRE		POIDS		Diamètre
		Titre droit	Tolérance	Poids droit	Tolérance	
Or..	100f	0,900	0,001	32gr,25806	$\frac{1}{1000}$	35mm
	50			16 ,12903		28
	20			6 ,45161	$\frac{2}{1000}$	21
	10			3 ,22580		19
	5			1 ,61290	$\frac{3}{1000}$	17

Tableau analogue pour les pièces d'argent.

Nature des pièces		TITRE		POIDS		Diamètre
		Titre droit	Tolérance	Poids droit	Tolérance	
	5f	0,900	0,002	25gr	$\frac{3}{1000}$	37mm
Argent	2	0,835	0,003	10	$\frac{5}{1000}$	27
	1			5		23
	0,50			2 ,50	$\frac{7}{1000}$	18
	0,20			1	$\frac{10}{1000}$	16

D'autres pays, l'Espagne, la Bulgarie, la Roumanie, la Serbie et la plupart des Républiques de l'Amérique du Sud, ont adopté notre système monétaire.

L'Autriche et la Russie, depuis 1886, frappent des pièces d'or au même poids et au même titre que nos pièces de 20f.

Les pièces de bronze actuellement employées sont : la *pièce de dix centimes*, qui pèse 10 grammes ; la *pièce de cinq centimes*, qui pèse 5 grammes. Elles sont faites avec un alliage qui contient 95 parties de cuivre, 4 d'étain et 1 de zinc.

Leurs diamètres sont 30mm et 25mm ; enfin la tolérance relative au titre est de $\frac{1}{100}$ pour les pièces de 10 centimes et de $\frac{1}{200}$ pour les pièces de 5 centimes.

Les anciennes monnaies étaient la *livre tournois*, qui servait d'unité ; le *sou*, dont il fallait 20 pour valoir une livre ; le *liard*, dont 4 valaient un sou ; enfin le *denier*, dont 3 valaient un liard.

81 livres tournois valent à très peu près 80f ; de sorte que une livre tournois vaut $\frac{80}{81} = 0^f,987651$.

Les objets d'or et d'argent sont assujettis en France au contrôle de l'État : chacun d'eux doit être poinçonné. La loi autorise deux titres pour les ouvrages d'argent : le premier à 0,950 ; le second à 0,800. Elle autorise trois titres pour les ouvrages d'or : le premier à 0,920 ; le second à 0,840 ; le troisième à 0,750. Les tolérances sont de $\frac{3}{1000}$ sur le titre d'un ouvrage d'or et de $\frac{5}{1000}$ sur celui d'un ouvrage d'argent.

Il est interdit de fabriquer des ouvrages d'or et d'argent à un titre plus faible que ceux qui ont été signalés ; mais si le titre est plus élevé, l'objet n'est pas brisé pour cela, il est simplement poinçonné au premier titre inférieur.

Un kilogramme d'or monnayé fournit 31 pièces de 100^f ; il vaut donc 3100^f. Le kilogramme d'or fin vaut 3444^f,44.

Un kilogramme d'argent monnayé fournit 40 pièces de 5^f ; il vaut donc 200^f. Le kilogramme d'argent fin vaut 222^f,22. Mais nous avons déjà dit que cette valeur de l'argent est purement conventionnelle et n'est plus la valeur réelle.

Les principales monnaies d'Allemagne sont : le *mark*, qui vaut 1^f,11 de notre monnaie ; puis les pièces de 2 marks, 5 marks et $\frac{1}{2}$ mark. Ces pièces sont en argent, et pour avoir leur valeur réelle, comparativement à la monnaie d'or, il faut leur faire subir une dépréciation, variable d'ailleurs, et que l'on ne peut calculer sans connaître le cours de l'argent.

Les pièces d'or sont : les pièces de 5 marks, de 10 marks et de 20 marks. La pièce de 10 marks vaut 12^f,35 : de sorte que la valeur du *mark-or* est 1^f,235 ; c'est là l'unité vraie de monnaie allemande.

Les principales monnaies d'Angleterre sont : le *shilling*, qui vaut 1^f,16 ; le *florin*, qui vaut 2 shillings ; le *double-florin* ; la *couronne*, qui vaut 5 shillings, et la *demi-couronne*.

Ces pièces sont en argent, et, pour avoir leur valeur réelle, il faut procéder comme nous l'avons déjà indiqué.

Les pièces d'or sont : le *souverain* ou *livre sterling*, qui vaut 25f,22, et le *demi-souverain* (*).

Application. — *Trouver la valeur du souverain anglais, versé au change de l'Hôtel des Monnaies, sachant que le gouvernement accorde à l'entreprise des monnaies* 6f,70 *pour frais de fabrication par kilogramme d'or monnayé et que le souverain anglais pèse* 7gr,988 *au titre de* 0,916.

La valeur du kilogramme d'or monnayé au titre de 0,900 et lancé dans la circulation est 3100f ; il faut déduire de cette somme les frais de fabrication, soit 6f,70 pour avoir la valeur réelle, qui est 3100 — 6,70 = 3093f,30.

Ainsi	900gr	d'or valent	3093f,30
	10gr	id.	34 ,37
	6gr	id.	20 ,62
	916gr	valent donc	3148f,29

Par conséquent le kilogramme d'or monnayé au titre anglais vaut 3148f,29 ; le gramme vaut 3f,1483, et 7gr,988 valent

$$3,1483 \times 7,988 = 25^f,15.$$

Remarque. — Si l'on voulait la valeur de la même pièce d'or au pair, il n'y aurait qu'à comparer la quantité d'or fin qu'elle contient à la quantité d'or fin contenue dans une pièce de 20f par exemple, ou dans un kilogramme d'or monnayé au titre français, et ne pas déduire de sa valeur les frais de fabrication.

203. **Mesure du temps.** — L'unité de temps dérive de la considération des mouvements de la terre.

On appelle *jour sidéral* la durée de l'une des révolutions de la terre autour de son axe, c'est-à-dire le temps qui

(*) Comme monnaie de compte, on emploie le *shilling-or*, dont 20 valent une livre-sterling, et qui vaut par conséquent 1f,26.

s'écoule entre deux passages consécutifs d'une étoile au méridien supérieur. Cette unité de temps n'est employée qu'en astronomie.

On emploie, dans la vie courante, le *jour solaire moyen*. On appelle *jour solaire vrai* l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du soleil au méridien ; les jours solaires vrais ne sont pas tous égaux, et le jour solaire moyen est la moyenne des jours solaires vrais contenus dans une année. On appelle *année* le temps que la terre emploie à effectuer une révolution complète autour du soleil. L'année contient 365 jours moyens et $\frac{1}{4}$ environ.

Le jour sidéral est un peu plus court que le jour solaire moyen.

Le jour se divise en 24 *heures ;* l'heure, en 60 *minutes ;* la minute, en 60 *secondes*.

L'unité scientifique de temps est la seconde de temps solaire moyen que nous venons de définir.

On exprime les temps en heures, minutes, secondes et fractions décimales de la seconde. Si l'on emploie les unités supérieures à celles-ci, on les convertit préalablement en heures, en se basant sur la remarque suivante concernant l'année.

L'*année civile* ou l'*année ordinaire* contient un nombre exact de jours : 365 jours, en général; mais tous les quatre ans, il y a une année dite *bissextile*, et qui contient 366 jours.

Les années sont indiquées dans le calendrier par leurs numéros ; le numéro d'ordre d'une année s'appelle son *millésime ;* les années bissextiles sont celles dont le millésime est un multiple de 4, sauf toutefois pour les années dont le millésime est un multiple de 100 et qui ne sont bissextiles que lorsque ce numéro est un multiple de 400 (*).

(*) Exemples : 1892 est une année bissextile ; 1893 sera une année ordinaire ; 1900 sera une année ordinaire, et 2000 une année bissextile.

L'année se divise en 12 *mois*, de durées inégales.

L'année commerciale est de 360 jours et le mois commercial est de 30 jours ; mais cette convention n'a pas de rapport avec la mesure théorique du temps.

1re Application. — *Trouver la valeur en minutes et fractions décimales de la minute de 26 jours, 13 heures, 32 minutes, 27 secondes, 12* (*).

26 jours valent $24 \times 26 = 624^h$; dans le temps indiqué il y a donc $624 + 13 = 637^h$; or, l'heure valant 60^m, 637^h valent

$$60 \times 637 = 38220^m.$$

Il y a donc $38220 + 32 = 38252^m$ dans le temps indiqué. Il nous reste maintenant à convertir $27^s,12$ en parties décimales de la minute, c'est-à-dire à prendre la 60me partie de 27,12; on obtient ainsi $0^m,452$.

Le nombre cherché est donc $38252^m,452$.

Remarque. — On trouverait d'une manière analogue que la *semaine*, qui vaut 7 jours, contient $7 \times 24 \times 60 \times 60$ secondes, ou 604800^s.

2e Application. — *Sachant que l'année tropique vaut 365,2422166 jours solaires moyens, convertir cette durée en jours, heures, minutes, secondes et fractions décimales de la seconde.*

Le nombre de jours est évidemment 365; il reste une fraction décimale de jour égale à 0,2422166; comme le jour vaut 24^h, cette fraction vaut $24 \times 0,2422166 = 5^h,8131984$. Il y a donc 5^h et il reste une fraction décimale de l'heure égale à $0^h,8131984$; comme l'heure vaut 60^m, cette fraction d'heure vaut $60 \times 0,8131984 = 48^m,791904$. Il y a par conséquent 48^m et il reste une fraction de minute égale à $0^m,791904$. Cette fraction vaut en secondes

$$60 \times 0,791904 = 47^s,51424.$$

(*) Abréviations : jour, *j* ; heure, *h* ; minute, *m* ; seconde, *s*.

La durée de l'année tropique est donc de

$$365^j\ 5^h\ 48^m\ 47^s,51424.$$

3e Application. — *Exprimer en jours, heures, minutes, secondes et parties décimales de la seconde une durée de* $3054728^s,64$.

Le nombre de minutes est le quotient à une unité près du nombre donné par 60; quant au reste, c'est évidemment la partie de cette durée qui sera exprimée en secondes et parties décimales de la seconde.

3054728, 64	60		
Reste $8^s,64$	50912	60	
	Reste 32^m	848	24
		Reste 8^h	35^j

Le reste de cette division est 8,64, nombre qui représente des secondes ; le quotient est 50912, nombre qui représente des minutes. Dans ce nombre de minutes il y autant d'heures que d'unités dans le quotient à une unité près par 60, le reste de cette opération étant la partie qui reste exprimée en minutes : on a ainsi 32^m ; le quotient est 848 et représente des heures. On aura de même le nombre de jours en prenant la partie entière du quotient de ce nombre par 24; comme précédemment le reste sera la portion exprimée en heures.

Nous avons réuni toutes ces divisions en une seule et même opération complexe, et nous obtenons

$$35^j\ 8^h\ 32^m\ 8^s,64$$

pour la durée indiquée.

207. **Mesure de la circonférence.** — L'unité d'arc la plus communément employée est le *degré*.

Le *degré* est la trois-cent-soixantième partie de la circonférence.

Chaque degré se divise en 60 parties égales appelées *minutes* et chaque minute, en 60 *secondes*; pour les parties

d'arc plus petites qu'une seconde on emploie les parties décimales de la seconde (*).

La conversion d'un arc donné en degrés, minutes, secondes et partie décimales de la seconde, soit en degrés et parties décimales du degré, soit en minutes et parties décimales de la minute, etc., se fait par un procédé semblable à celui employé antérieurement pour traiter le problème analogue sur les temps.

1re Application. — *Convertir en degrés et parties décimales du degré l'arc de* 17° 52′ 24″,7.

Il suffit, pour cela, d'évaluer la partie complémentaire de cet arc, 52′ 24″,7, en secondes et parties décimales de la seconde; puis d'exprimer le nombre ainsi obtenu en fractions de degré, en se rappelant que le degré vaut 3600″ et que, par suite, une seconde vaut $\frac{1}{3600}$ de degré.

On a ainsi

$$\begin{array}{lll} 52' & \text{qui valent} & 60 \times 52 = 3120'' \\ \text{et} & 24'',7 & = \underline{\quad 24'',7} \\ & 52'\,24'',7 & = 3144'',7; \end{array}$$

donc cette portion de degré vaut

$$\frac{1}{3600} \times 3144,7 = \frac{31447}{36000};$$

et l'on est ramené à convertir cette fraction en fraction décimale. On a ainsi

$$0,87352777.....,$$

et, pour l'arc donné,

$$17°,87352777.....$$

2e Application. — *Sachant que toute circonférence a pour longueur* $2\pi R$, R *étant le rayon et* π *le nombre* 3,14159265, *trouver, en degrés, minutes, secondes et fractions décimales de*

(*) Abréviations : degré, °; minute, ′; seconde, ″.

la seconde, la mesure de l'arc dont la longueur est égale au rayon.

L'arc de longueur $2\pi R$ vaut en degrés, 360; donc l'arc de longueur 1 vaut $\frac{360}{2\pi R}$, et l'arc de longueur R vaut

$$\frac{360}{2\pi} = \frac{360}{6,2831853} = 57^\circ,295779.$$

Pour convertir en minutes la partie décimale, il suffit de la multiplier par 60 (n° 190, 2° App.), ce qui donne

$$17',74674;$$

pour convertir la nouvelle partie décimale en secondes, on la multiplie aussi par 60 et l'on a :

$$44'',80.$$

Donc l'arc demandé est

$$57^\circ\, 17'\, 44'',80.$$

On commence à adopter, dans divers ouvrages, la division du quadrant en 100 parties égales, appelées *grades*.

Le grade est alors divisé en cent *minutes centésimales* ; la minute, en cent *secondes centésimales*. Ce système d'unités est absolument conforme au système décimal.

La circonférence entière vaut alors 400 grades.

Les abréviations sont : ^{G}, pour le grade ; $'$, pour la minute, et $''$, pour la seconde.

Ces unités ont été employées par Delambre, et aussi par Laplace, dans l'*Exposition du système du monde*.

EXERCICES

1° On sait que la longueur d'une circonférence est $2\pi R$, R étant le rayon et π le nombre 3,1416. Trouver le rayon du méridien terrestre, en assimilant ce méridien à un cercle. Exprimer ce rayon en kilomètres, en milles marins, en lieues marines.

2° Trouver, en hectares et en arpents des eaux et forêts, l'aire d'un pré ayant la forme d'un rectangle de 1500^m et $235^m,7$ de côtés, sachant que cette aire, en mètres carrés, est le produit des deux côtés.

3° Faire la somme des longueurs

$$57^T\,4^P\,7^p, \qquad 81^T\,3^P\,8^p\,11^l, \qquad 429^T\,2^P\,4^p\,7^l.$$

Exprimer cette somme en pieds et parties décimales du pied, en toises et parties décimales de la toise, et enfin en mètres et parties décimales du mètre.

4° Trouver en toises carrées et parties décimales de la toise carrée l'aire d'un rectangle dont les deux côtés ont pour longueurs $57^T\,4^P\,7^p$ et $82^T\,2^P\,3^p$.

Exprimer ensuite le résultat en mètres carrés et parties décimales du mètre carré.

5° Trouver combien il y a de mètres cubes dans 8 toises cubes 5 pieds cubes 9 pouces cubes. Convertir ce volume en litres.

6° Les possessions de la France, jointes à la France elle-même, forment environ 4700 milliers de kilomètres carrés de territoire. Évaluer cette aire en hectares. Trouver le côté du carré qui aurait la même aire, les deux côtés d'un rectangle de même aire et dont l'un des côtés est triple de l'autre.

7° Mêmes questions pour l'empire britannique, qui a 293460 myriamètres carrés de superficie.

8° En Europe, il y a 36 habitants par kilomètre carré. Trouver la superficie de l'Europe sachant qu'elle renferme 360 millions d'habitants.

9° La mesure principale de longueur anglaise est le *yard*, qui vaut $0^{m},91438348$. Trouver la longueur du *mille* anglais, sachant qu'il vaut 1760 yards. Trouver l'aire en mètres carrés du yard carré et de l'*acre*, sachant que l'acre vaut 4840 yards carrés.

10° La mesure principale de capacité anglaise est le *gallon*, qui vaut $4^{l},543458$. Trouver en litres et en mètres cubes la capacité du *bushel*, qui vaut 8 gallons, et du *chaldron*, qui vaut 36 bushels.

11° L'une des unités de poids anglaises est la *livre avoir du poids*, qui vaut 7000 *grains*, et $453^{g},592645$. Valeur du grain en centigrammes et de la *livre troy impériale*, qui vaut 5760 grains. Rapport du quintal anglais qui vaut 112 livres avoir du poids au quintal français ancien.

12° En Russie, la *werst* a pour longueur $1^{km},067$ et vaut 500 *sagènes marines*. Longueur de la sagène marine.

13° L'unité de monnaie autrichienne est le *florin*, pièce d'argent au titre de 0,900 et pesant $12^{g},345$. Valeur du florin en francs. Le *florin-or* vaut $2^{f},50$. Rapport des deux florins.

14° Au Brésil, la pièce de 20000 *reis or* pèse $17^{g},929$ et est au titre de 0,917. Valeur du reis.

15° La *piastre* en Chine vaut $5^{f},38$; c'est une pièce d'argent au titre de 0,900. Poids de cette pièce.

16° La latitude de Copenhague est 55° 41′ 13″ ; celle de Gibraltar 31° 7′ 20″ ; celle de Ispahan 32° 39′ 34″. Somme de ces trois latitudes.

17° Sachant que 15° en longitude valent 1^{h}, et que les longitudes de Saint-Pétersbourg, de Berlin et de Vienne sont 17° 58′ 8″, 11° 3′ 30″ et 14° 2′ 27″, trouver ces longitudes en heures, minutes et secondes.

18° La densité de l'acier trempé est 7,816. Trouver le poids d'une toise cube de cet acier.

TABLE DES MATIÈRES

PRÉLIMINAIRES

1. Nombre entier. . . . 1
2. Unité 1
3. Zéro 1
4. Idée d'addition . . . 1
5. Autres moyens de parvenir à l'idée de nombre entier 2
6. Objet de l'arithmétique. 3

LIVRE PREMIER

Nombres entiers. — Premières opérations.

CHAPITRE PREMIER :

NUMÉRATION

7. Représentation des nombres 5
8. Division de la numération. 5

Numération parlée.

9. Système décimal. . . 6
10. Noms des nombres entiers 7
11. Systèmes de numération 10

Numération écrite.

12. Symboles adoptés pour représenter les nombres. Conventions. . 10
13. Lecture des nombres représentés par des chiffres. 11
14 et 15. Valeur absolue d'un chiffre, valeur relative 12
16. Chiffres romains. . . 13

CHAPITRE II : ADDITION

17. Somme de plusieurs nombres entiers . . . 15
18. Définition de l'addition. — Cas simples . . 15
19. Table d'addition. . . 16
20. Addition d'un nombre quelconque et d'un nombre d'un seul chiffre 19
21. Addition de nombres entiers quelconques. . 19
22. Preuve de l'addition. . 21
23. Propriétés de l'addition. 21
24. Inégalités. 22

CHAPITRE III : SOUSTRACTION

25. Définition de la soustraction. — Signe de la soustraction . . . 24
26. Cas où le reste est un nombre d'un seul chiffre 24
27. Cas général 25
28. Preuve de la soustraction 27
29. Propriétés simples des égalités. 27
*30. Nombres entiers négatifs 29
*31. Suite des propriétés des nombres négatifs . . 30
*32. Sommes algébriques . 31

CHAPITRE IV :

MULTIPLICATION

33. Définition de la multiplication 34
34. Table de multiplication. 35
35. Multiplication d'un nombre quelconque par un nombre d'un seul chiffre 38
36. Multiplication d'un nombre quelconque par un nombre quelconque 40
37. Nombre des chiffres du produit. 43
38. Propriétés de la multiplication 44
39. Autres propriétés de la multiplication . . . 47
40. Quelques propositions relatives aux produits de facteurs . . . 49
41. Exposants. 50
42. Règles de calcul simples relatives aux exposants 51
*43. Produit de deux nombres entiers positifs ou négatifs. . . . 52
*44. Multiplication d'une somme algébrique par un nombre entier positif. 54
*45. Multiplication d'une somme algébrique par un nombre entier négatif 55
*46. Multiplication de deux sommes algébriques . . 55

CHAPITRE V : DIVISION

47. Préliminaires, définition 57
48. Manières évidentes d'effectuer l'opération . 58
49. Division avec reste . . 59
50. 1er Cas 61
51. 2e Cas. 62
52. 3e Cas. 65
53. Preuve de la division . 70
54. Propriétés simples relatives à la division. . 71
55. Suite des propriétés simples relatives à la division 75
*56. Division de deux nombres entiers positifs ou négatifs. . . . 82
*57. Quelques propriétés relatives aux sommes algébriques. — Remarque sur les égalités . 83
*58. Systèmes de numération 84
Exercices 88

CHAPITRE VI : DIVISIBILITE

59 et 60. Caractère de divisibilité par 2 92
61. Caractère de divisibilité par 5 93
62. Caractère de divisibilité par 4 ou par 25 . . 94
63. Caractère de divisibilité par 8 ou par 125. . 94
64. Caractère de divisibilité par 3 ou par 9 . . 95
65. Caractère de divisibilité par 11 96
66. Preuve d'une opération par 3, par 9, par 11, etc. 98
*67. Restes négatifs. — Restes des nombres négatifs 101
*68. Caractère de divisibilité par 7 102
*69. Caractère de divisibilité par un nombre quelconque positif A . . 104
*70. Caractères de divisibilité dans un système de numération quelconque 105
Exercices 106

LIVRE II

Propriétés des nombres.

CHAPITRE PREMIER :

NOMBRES PREMIERS

71 et 72. Propositions sur les nombres premiers 109
73. Nombres composés . . 113
74. Nombres premiers plus petits qu'un nombre donné 115
75. Reconnaître si un nombre donné est ou n'est pas premier . . . 18
*76. Restes des puissances

d'un nombre, relatifs à un module premier donné 121
*77. Exposant auquel appartient un nombre par rapport à un module premier p. 123
*78. Théorème de Fermat . 124
Exercices 125

CHAPITRE II :

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

79. Plus grand commun diviseur entre deux nombres. 126
80. Théorèmes relatifs au plus grand commun diviseur 131
81. Plus grand commun diviseur de plusieurs nombres 132
82. Théorèmes qui découlent de la théorie du plus grand commun diviseur 135
83. Plus petit commun multiple de deux nombres 138
84. Plus petit commun multiple de plusieurs nombres 140
85. Autre manière d'obtenir le plus petit commun multiple de plusieurs nombres. — Formule de Gauss 140
*86. Calcul des restes obtenus dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres, en fonction de ces nombres . . . 142
*87. Usage de l'égalité $\pm\delta = bu - av$. . 147
*88. Résolution de l'équation $ax + by = c$ en nombres entiers . . 149
Exercices 152

CHAPITRE III :

DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN FACTEURS PREMIERS

89. 154
90. Diviseurs d'un nombre entier 156
91. Plus grand commun diviseur de plusieurs nombres 159
92. Plus petit commun multiple de plusieurs nombres. 160
93. 161
*94. Nombres congrus ou équivalents. . . . 161
*95. Idée des congruences entières 164
*96. Caractères de divisibilité 164
*97. Congruences du premier degré 165
*98. Théorème de Fermat . 166
*99. Nombres associés par rapport à un module premier p. — Théorème de Wilson . . 167
*100. Sur le nombre des nombres premiers avec un nombre donné et non supérieurs à ce nombre. . . . 168
Exercices . . . 171

LIVRE III

Nombres fractionnaires. — Nombres décimaux.

CHAPITRE PREMIER : NOMBRES FRACTIONNAIRES

101. Longueurs 173
102. Définition du nombre fractionnaire . . . 175
103. Propriétés simples des nombres fractionnaires 176
104. Critérium d'égalité des nombres fractionnaires. 180
105. Simplification des nom-

bres fractionnaires . 181
106. Réduction des nombres fractionnaires au même dénominateur . . . 184

Chapitre II : OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES FRACTIONNAIRES

107. Addition des nombres fractionnaires . . . 187
108. Soustraction des nombres fractionnaires . 189
109. Multiplication des nombres fractionnaires . 190
110. Division des nombres fractionnaires . . . 193
111. Propriétés de l'addition des nombres fractionnaires. — Propriétés de la soustraction. . 194
112. Propriétés de la multiplication et de la division des nombres fractionnaires . . . 196
113. Propriétés des égalités . 199
*114. Nombres fractionnaires négatifs. 199
*115. Ensemble des nombres rationnels 202
*116 Inégalités. 206
Exercices 208

Chapitre III : NOMBRES DÉCIMAUX

117. Définition du nombre décimal. — Représentation de ce nombre . 210
118. Addition des nombres décimaux 215
119. Soustraction des nombres décimaux. . . 216
120. Multiplication des nombres décimaux. . . 217
121. Division des nombres décimaux 218
122. Valeurs approchées d'un quotient 218
123. Réduction d'un nombre fractionnaire en décimales 222
124. Nombres fractionnaires donnant naissance à des nombres décimaux limités ou à des nombres décimaux illimités 226
125. Fraction génératrice d'une fraction décimale périodique donnée . . 229
126. Fraction génératrice d'une fraction décimale périodique. — Suite. . 233
*127. Restes des puissances d'un nombre *a* par rapport à un module quelconque, *b*, premier avec lui . . . 239
*128. Théorème de Fermat généralisé 239
*129. Nombre des termes de la période du développement d'un nombre fractionnaire en décimales 240
Exercices 243

LIVRE IV

Racines. — Nombres incommensurables.

Chapitre Premier : RACINE CARRÉE

130. Définitions. 245
131. Racine carrée à une unité près. . . . 247
132. Preuve de la racine carrée. 255
133. Racine carrée à une unité près d'un nombre fractionnaire ou décimal quelconque . 256
134. Propriétés relatives à la racine carrée . . . 257
135. Valeurs approchées d'une racine carrée . . . 259
*136. Résidus et non-résidus quadratiques . . . 264
*137. Résidus des modules premiers 270
*138. Du résidu — 1. — Résidus minima . . . 274
*139. Critériums d'Euler et de Gauss 276

*140. Théorème de Bachet . 280
Exercices 284

CHAPITRE II :

RACINE CUBIQUE

141. Définition. 288
142. Racine cubique à une unité près. . . . 291
143. Preuve de la racine cubique 301
144. Racine cubique à une unité près d'un nombre fractionnaire ou décimal quelconque . 302
145. Propriétés relatives à la racine cubique . . 303
146. Valeurs approchées d'une racine cubique. . . 305
Exercices 310

CHAPITRE III : NOMBRES INCOMMENSURABLES OU IRRATIONNELS

147. Définition des nombres incommensurables ou irrationnels . . . 313
148. Nombres égaux, inégaux; divers modes de représentation. — Inverse d'un nombre . 322
149. Addition et soustraction des nombres rationnels ou irrationnels. . . 331
150. Multiplication des nombres rationnels ou irrationnels 335
151. Division des nombres rationnels ou irrationnels. 340
152. Définition du radical arithmétique . . 343
153. Calcul des radicaux arithmétiques 347
*154. Nombres irrationnels négatifs 351
*155. Segments. — Représentation des nombres par des segments. . 351
*156. Différence fondamentale qui existe entre l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble total des nombres 357
*157. Egalités. — Inégalités . 359
Exercices 361

LIVRE V

Rapports et proportions. — Règles de trois, d'intérêt, etc.

CHAPITRE PREMIER: RAPPORTS ET PROPORTIONS

158. Rapport 363
159. Rapports égaux. — Calculs sur les rapports. 366
160. Propriétés concernant les rapports égaux. . . 370
161. Proportions. — Moyennes 374
Exercices 379

CHAPITRE II : GRANDEURS PROPORTIONNELLES. — RÈGLES DE TROIS, D'INTÉRÊT, D'ESCOMPTE, D'ALLIAGE, ETC.

162. Grandeurs proportionnelles 380
163. Règle de trois simple . . 385
164. Règle de trois composée. 386
165. Règle d'intérêt. 388
166. Rentes sur l'Etat. . . . 391
167. Règles d'escompte . . . 393
168. Règles de société. . . . 397
169. Règles d'alliage 399
170. Problèmes généraux sur les alliages 402
171. Problèmes sur les mélanges. 403
Exercices 406

LIVRE VI

Chapitre premier : ERREURS

172. Définitions. 407
173. Relations entre l'erreur absolue et le nombre des chiffres exacts . . 415
174. Relations entre l'erreur relative et le nombre des chiffres exacts . . 417
175. Formules des erreurs. . 419
176. Addition et soustraction. 421
177. Multiplication 421
178. Division. 421
179. Racine carrée 425
180. Racine cubique. 427
181. Formule générale du monome. 427
182. Calcul du résultat d'une formule arithmétique donnée avec une approximation donnée. . 428
183. Addition et soustraction. 429
184. Multiplication 430
185. Division 430
186. Racine carrée 431
187. Formule complexe . . . 432
188. 435
189. Quelques mots sur l'emploi des valeurs relatives 437
190. Produit ou quotient. . . 438
191. Racine carrée 439
Exercices. 441

Chapitre II : PROBLÈMES ET THÉORÈMES

192 à 200. Exemples de solutions. 443

Chapitre III : SYSTÈME MÉTRIQUE DECIMAL

200. 459
201. Mesures de longueurs. . 460
202. — surfaces . . 463
203. — volumes . . 467
204. — poids. . . . 473
205. Monnaies 476
206. Mesure du temps. . . . 482
207. Mesure de la circonférence 485
Exercices. 488

Bar-le-Duc. — Imp. Comte Jacquet, Facdouel, Dir.

LIBRAIRIE NONY ET Cie, 63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS, 5e.

ANNUAIRE DE LA JEUNESSE

par **H. Vuibert** (12e année). *Moyens de s'instruire. — Choix d'une carrière.* — Un vol. in-12 de 1168 pages ; 3 fr. ; cart. toile, 4 fr.

L'Annuaire de la Jeunesse est appelé à être entre les mains de tous les jeunes gens de dix à vingt ans et de tous les pères de famille soucieux de l'éducation et de l'avenir de leurs enfants.

Dans la première partie : ÉDUCATION ET INSTRUCTION, on passe en revue tout ce qui a trait à l'instruction des garçons et des filles à tous ses degrés. L'auteur ne se limite pas, bien entendu, aux établissements universitaires ; il s'étend aussi sur tout ce qui a un caractère professionnel, spécial.

La seconde partie : ÉCOLES SPÉCIALES, intéresse surtout les jeunes gens qui se destinent aux écoles où l'on va couronner son instruction : elle leur montre ce que sont ces écoles, les moyens de s'y préparer, les difficultés des concours, la nature de l'enseignement, les débouchés qui s'offrent à la sortie, etc. Le candidat sait ainsi où il va et peut se rendre compte de ses chances de succès.

La troisième partie de l'ouvrage : CARRIÈRES ET PROFESSIONS, est consacrée à l'étude de l'apprentissage et des différentes carrières et forme un second volume (*sous presse*).

Le livre se termine par des ANNEXES, comprenant toutes les lois et décrets qui intéressent les jeunes gens à la veille de faire leur service militaire, de s'engager ou de se créer une position.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

publié par **H. Vuibert** (*27e année*).

Prix de l'abonnement d'un an : Paris et départements, 5 fr. ; Etranger, 6 fr. — L'abonnement est annuel et part du 1er octobre. (A quelque époque de l'année que l'on souscrive, on reçoit tous les numéros parus depuis le 1er octobre précédent.)

Le *Journal de Mathématiques élémentaires* a pour but de développer chez les jeunes gens le goût des Mathématiques et de leur en faciliter l'étude.

Les élèves trouvent dans cette publication les problèmes les plus propres à exciter leur curiosité et à éveiller leur imagination. Ils y font insérer eux-mêmes ce qu'ils produisent de meilleur. Le journal ouvre ainsi entre tous ses jeunes abonnés un concours général permanent qui en stimulant les efforts du chacun favorise les progrès de tous.

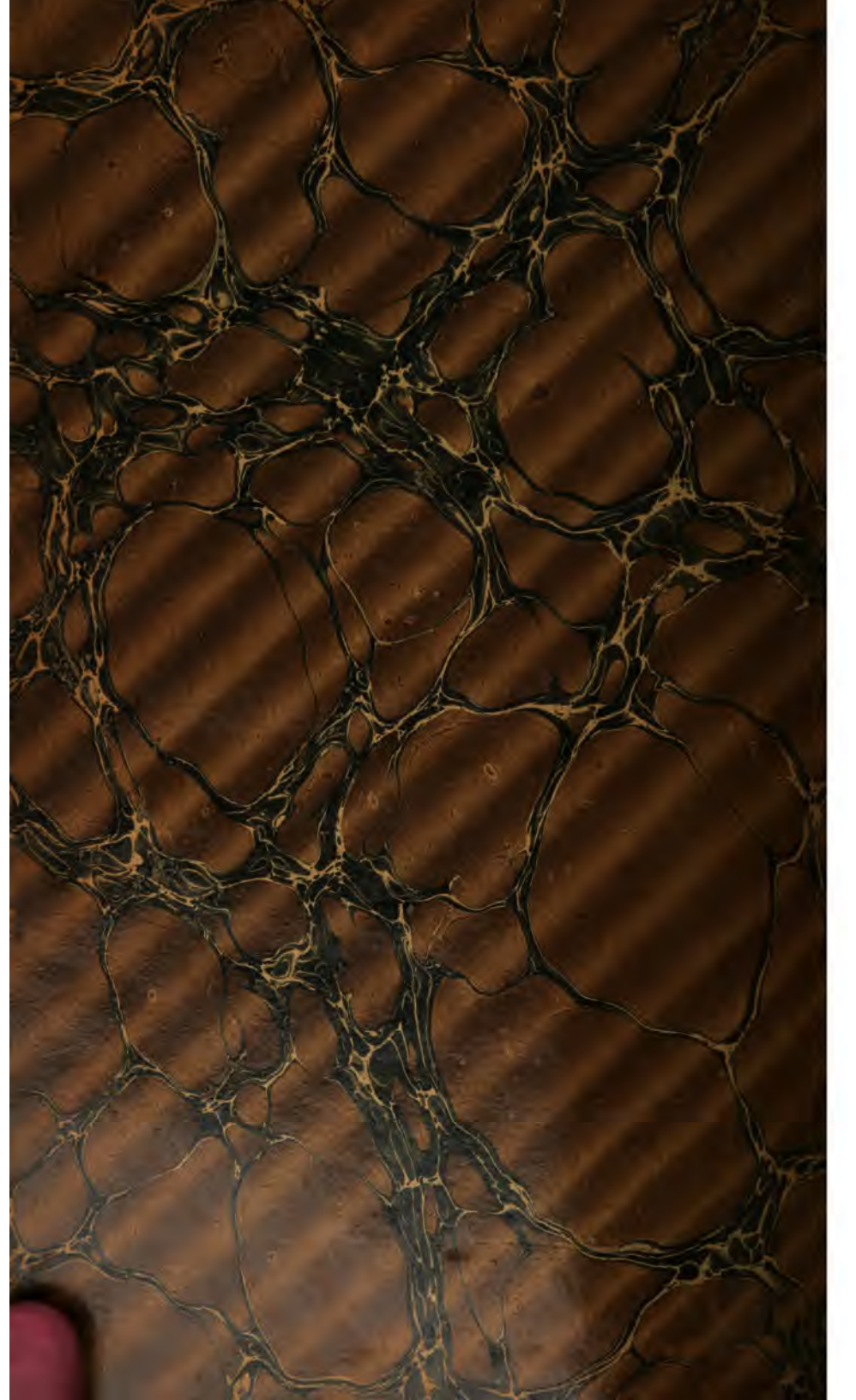
Cette publication sert aussi à donner aux jeunes gens une idée bien nette de ce que sont les examens qui ouvrent les portes des diverses écoles et de la plupart des carrières. Les sujets donnés à ces examens ou concours sont tous reproduits fidèlement dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*, avec les développements qui peuvent intéresser les candidats.

L'Éducation Mathématique

Journal in-4°, paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet et publié par **Ch. Bioche**, ancien élève de l'Ecole Normale, professeur agrégé au lycée Louis-le-Grand, et **H. Vuibert**. — Prix de l'abonnement ; 5 fr. (A quelque époque de l'année que l'on s'abonne, on reçoit tous les numéros parus depuis le 1er octobre.)

Ce journal, — créé pour les débutants qui ne peuvent pas encore suivre le *Journal de Mathématiques élémentaires*, — s'adresse aux élèves des classes de lettres des lycées et collèges et aux élèves de l'enseignement primaire supérieur.

Des *questions proposées* sont livrées aux recherches des abonnés. Les solutions insérées dans le journal sont rédigées avec les plus grands détails, de manière à ne laisser dans l'ombre aucune partie de la démonstration, et en rappelant les théorèmes à l'appui.

L'Education Mathématique publie en outre des notes sur des questions de cours et des variétés sur l'histoire et les à côté des mathématiques.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet, FACDOUEL, Dir.